Елементи теорії матриць і визначників

План лекції:

1. Визначники 2-го та 3-го, n-го порядку. Властивості визначників.
2. Мінори та алгебраїчні доповнення.
3. Правило знаходження визначника довільного порядку (теорема Лапласа).
4. Матриці, дії з ними.
5. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць.
6. Обернена матриця, її обчислення.

---

1. *Визначники 2-го та 3-го порядку, їх властивості.*

Визначником другого порядку називається число, записане у вигляді таблиці, яке дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – елементи визначника, при цьому елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{12} і a_{21} – побічну.

Отже, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.

Приклад 1.

Обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -2 - 12 = -14$$

.

Приклад 2.

Обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 = -4 - 20 = -24.$$

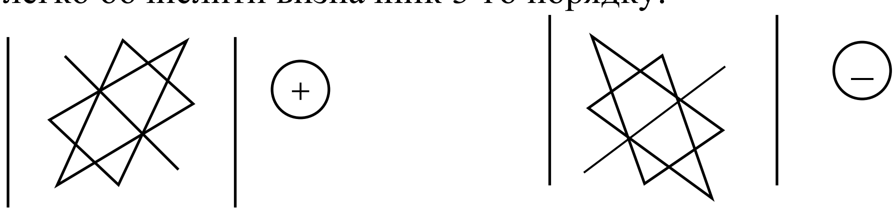
Визначник третього порядку – це число, одержане так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \, a_{13} \\ a_{21} \, a_{22} \, a_{23} \\ a_{31} \, a_{32} \, a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} -$$
$$a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Символи a_{ij} називаються *елементами визн*ачника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника 3-го порядку, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – побічну діагональ.

Існує правило, яке називають ***правилом трикутника***, або *правилом Саріуса*, яке дозволяє легко обчислити визначник 3-го порядку:



Отже, для обчислення визначника 3-го порядку за правилом трикутника, із знаком плюс беремо добуток елементів, що стоять на головній діагоналі, а також добутки елементів, які лежать на паралелях до цієї діагоналі з третім множником, що стоїть у протилежному куті таблиці; а з знаком мінус добуток елементів, що лежать на побічній діагоналі, а також добутки елементів, що стоять на паралелях до цієї діагоналі з третім множником, який стоїть у протилежному куті таблиці.

Отже**,** ***визначник*** – алгебраїчна сума всіх можливих добутків його елементів, взятих по одному з кожного рядка і з кожного стовпця з відповідним знаком.

Приклад 1.

Обчислити визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-3) + 2\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot\left(-3\right) - (-3)\cdot 0\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot(-3) =$$
$$= 0 + 8 - 18 + 0 - 2 + 18 = 6.$$

Приклад 2.

Обчислити визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3) + 1\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot\left(-3\right) - (-3)\cdot 1\cdot 2 - (-3)\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 1 =$$
$$= -3 - 4 - 18 + 6 + 9 + 4 = -6.$$

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) основні ***властивості визначників****:*

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями і навпаки.
2. Від перестановки двох рядків або двох стовпців визначник змінює лише знак.
3. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулеві, то визначник дорівнює нулю.
4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.
5. Визначник, у якого елементи будь-яких двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

6. Визначник, у якого елементи будь-яких двох рядків (стовпців) однакові, дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент якого-небудь рядка (стовпця) визначника є сума двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників. У одного з них елементами відповідного рядка (стовпця) будуть перші доданки, а у другого – другі. Всі інші елементи у цих двох визначників ті, що і в даного.
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число.

Визначником n ***- го порядку*** називається число, записане у вигляді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

де i - номер рядка, а j - номер стовпця.

Отже, визначником n - го порядку називається число, рівне алгебраїчній сумі n членів, кожен з яких є добуток його n елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного з n рядків і кожного з n стовпців квадратної таблиці чисел, причому половина визначених членів береться з їх знаками, а інші – з протилежними.

2. Мінори та алгебраїчні доповнення.

Введемо ще два поняття, які будуть потрібні нам для обчислення визначників будь-якого порядку.

Розглянемо визначник n-го порядку.

Мінором M_{ij} будь-якого елемента a_{ij} визначника n-го називається визначник (n-1) порядку, одержаний з даного визначника викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких міститься даний елемент.

Мінор елемента a_{ij} позначимо M_{ij}.

Приклад 3. Обчислити мінор M_{12} визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Мінор M_{12} елемента визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ дорівнює: $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} будь-якого елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.}$$

Введені поняття мінору та алгебраїчного доповнення дають можливість одержати ще один метод обчислення визначників третього порядку, який узагальнюється на визначники будь-якого порядку.

3. *Правило знаходження визначника довільного порядку.*

Теорема Лапласа*:* визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

Дана формула називається *розкладом визначника* за елементами і-го рядка.

Наслідок 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад 4. Обчислити визначник IV порядку, користуючись властивостями визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

До елементів третього стовпця додаємо елементи другого стовпця, помножені на два, а до елементів другого стовпця - елементи першого стовпця, одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & -1 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо одержаний визначник за елементами першого рядка; оскільки три елементи 1 рядка дорівнюють нулю, то обчислення визначника IV порядку зводиться до обчислення тільки одного визначника III порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-8) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -32 \cdot (10-1) = -288 .$$

4. Матриці, дії з ними.

Прямокутна таблиця, яка складається з $m \times n$ чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях, називається ***матрицею*** і записується так:

$$À = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються елементами матриці, перший індекс i – номер рядка, другий j – номер стовпця.

Запис $m \times n$ означає розмір (розмірність) матриці. Число m вказує на кількість рядків, а n – кількість стовпців.

Матриця називається ***прямокутною***, якщо $m \neq n$**,** і ***квадратною***, якщо $m = n$; тоді кількість рядків (стовпців) n називається порядок матриці.

Дві матриці називаються ***рівними***, якщо у них однакове число рядків і стовпців, і відповідні елементи рівні.

Матриця називається ***нульовою*** (нуль-матрицею), якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O.

Матрицею-рядком називається матриця, яка складається з одного рядка ($1n$ - матриця).

Матрицею-стовпцем називається матриця, яка складається з одного стовпця ($m1$- матриця).

Матриця A^T, яку одержимо з матриці A заміною рядків стовпцями, називається ***транспонованою*** відносно матриці A, тобто:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots\dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \dots\dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Головною діагоналлю квадратної матриці називається уявна пряма, яка з'єднує її елементи, індекси яких однакові, і її елементи називають діагональними.

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім тих, що не стоять на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

У діагональній матриці не всі діагональні елементи відмінні від нуля.

Одиничною матрицею називається діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці. Позначають одиничну матрицю Е.

Визначником квадратної матриці A називається визначник, елементами якого є елементи матриці A, він позначається $|A|$.

Квадратна матриця називається ***неособливою (невиродженою)***, якщо її визначник не дорівнює нулю, і ***особливою (виродженою)***, якщо її визначник дорівнює нулю.

Приєднаною до квадратної матриці A називається матриця $\bar{A}$ того ж порядку, елементами якої являються алгебраїчні доповнення відповідних елементів визначника матриці A^T, транспонованої до A:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \dots\dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \dots\dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \dots\dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. *Матриці, дії з ними.*

З матрицями можна виконувати наступні дії: додавати (віднімати), множити матрицю на число, множити матриці.

Розглянемо кожну із дій окремо.

Сумою (різницею) двох матриць A і B однакового розміру називається матриця C, елементи якої рівні сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B, тобто $c_{ij} = a_{ij} + в_{ij}$ для суми матриць($c_{ij} = a_{ij} - в_{ij}$ – для різниці).

Добутком матриці A на довільне число α називається матриця, елементами якої є добутки елементів матриці A на число α:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn} \end{pmatrix};\quad A\cdot\alpha=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13}\ldots\ldots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23}\ldots\ldots \alpha a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3}\ldots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці A розміром $(m\times p)$ ***на матрицю*** B розміром $(p\times n)$ називається матриця C розміром $(m\times n)$, елементи якої дорівнюють сумі добутків відповідних елементів i - го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто:

$$\boxed{c_{ij}=a_{i1}\hat{a}_{1j}+a_{i2}\hat{a}_{2j}+\ldots+a_{ip}\hat{a}_{pj}},\quad (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}),\ (\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{n}).$$

Це означення називають правилом множення рядка на стовпець.

Добуток матриці A на матрицю B позначається AB.

Таким чином, добуток AB має зміст лише при умові, що *число стовпців матриці* A *дорівнює числу рядків матриці* B.

Приклад 5. Обчислити добуток двох матриць: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot4+(-5)\cdot3 & 2\cdot0+1\cdot1+(-5)\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot(-2)+(-5)\cdot0 \\ 3\cdot1+(-4)\cdot4+2\cdot3 & 3\cdot0+(-4)\cdot1+2\cdot1 & 3\cdot3+(-4)\cdot(-2)+2\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & -4 & 4 \\ -7 & -2 & 17 \end{pmatrix}.$$

5. *Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць.*

Розглянемо прямокутну матрицю *A,* яка складається з *m* рядків та *n* стовпців:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ - - - & - - - & - - - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в цій матриці довільно κ рядків і κ стовпців, де $k \le \min(m,n)$. Із елементів, які стоять на перетині виділених рядків і стовпців, складаємо визначник κ –го порядку. Всі такі визначники називаються мінорами матриці *A*.

Обираючи різними способами k рядків та k стовпців, одержимо деяку кількість мінорів k-го порядку. Розглянемо в матриці *A* ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок дорівнює r.

Рангом $r(A)$ ***матриці*** *A* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Таким чином, якщо ранг матриці r, то серед мінорів цієї матриці є принаймні один мінор r-го порядку, відмінний від нуля; в той же час всі мінори (r+1)-го і вищого порядку дорівнюють нулеві. Позначимо ранг матриці *A* через r(*A*).

Для обчислення рангу матриці її спочатку спрощують за допомогою елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриці називають:

1. Перестановку двох рядків (стовпців);
2. Множення всіх елементів рядка (стовпця) на довільне число $c \neq 0$;
3. Додавання до всіх елементів рядка (стовпця) відповідних елементів паралельного рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число.

Теорема 1. (Про елементарні перетворення): При елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється.

6. *Обернена матриця, її обчислення.*

Оберненою матрицею для даної квадратної матриці A називається така матриця A^{-1}**,** добуток на яку матриці A є одиничною матрицею, тобто

$$\boxed{AA^{-1} = E}.$$

Теорема. Для кожної неособливої квадратної матриці існує обернена і притому тільки одна. Для особливої квадратної матриці обернена не існує.

Обернену матрицю знаходять за формулою:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{pmatrix}}, \text{ або } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A}.$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Правило знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник заданої матриці $|A|$. Якщо визначник не дорівнює нулю, то матриця має обернену. (Якщо визначник рівний нулю, то розв'язання завдання закінчується. Матриця оберненої не має).
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів визначника.
3. Скласти приєднану матрицю $\overline{A}$.
4. Помножити приєднану матрицю $\overline{A}$ на $\frac{1}{|A|}$. Це і буде шуканий результат.
5. Виконати перевірку, помноживши знайдену обернену матрицю A^{-1} на задану матрицю A, в результаті повинна вийти одинична матриця. Тобто $AA^{-1} = E$.