Загальна теорія систем лінійних рівнянь.
Розв'язування систем лінійних рівнянь

<u>План</u>

1. *Основні поняття теорії СЛР.*
2. *Розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці*
3. *Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.*
4. *Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса*

<u>Основні поняття теорії СЛР.</u>

Системою m лінійних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$, або ***лінійною системою,*** називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ij} називаються ***коефіцієнтами***, а числа b_i − вільними числами системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не має.

Розв'язком системи рівнянь з n невідомими є n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які перетворюють кожне рівняння системи правильну числову рівність, тобто задовольняють її.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має принаймні один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має розв'язків.

З коефіцієнтів при невідомих складається матриця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ − називається ***основною*** матрицею, а матрицю

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ − називають ***розширеною матрицею*** системи.

Вільні члени і невідомі записуються у вигляді матриць стовпців:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Систему можна записати через добуток матриць

$$\boldsymbol{AX=B} \qquad (2)$$

Такий запис системи називається *матричною* формою запису системи (1). Або

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Вважаємо $det A \neq 0$, тоді для неї існує A^{-1} помножимо обидві частини (2) на A^{-1}, тоді $A^{-1}(A\cdot X)=A^{-1}B$.

Використовуючи сполучний закон добутку матриць маємо $(A\cdot A^{-1})X=A^{-1}B$, звідки $EX=A^{-1}B$, але $EX=X$, тоді $X=A^{-1}B$.

Алгоритм розв'язку матричного рівняння (3):

1. Знайти обернену матрицю A^{-1};
2. Обчислити добуток оберненої матриці A^{-1} на матрицю — стовпець B із вільних членів;
3. Користуючись рівністю матриць записуємо відповідь.

<u>Приклад:</u> Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+2x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=1 \end{cases}$$

Складаємо матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ AX=B$$

Перевіримо рівність Δ нулю.

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}=24-15-24-27+20+16=-6\neq 0$$

Щоб знайти обернену матрицю, знаходимо A_{ij}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}=22; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2; \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}=1; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-17; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=10$$

$$A=\begin{pmatrix} 22 & 2 & -14 \\ 1 & -1 & -2 \\ -17 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Транспонуємо одержану матрицю і ділимо на (-6) і це буде обернена матриця A^{-1}.

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}22 & 1 & -17\\ 2 & -1 & -1\\ -14 & -2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Знаходимо добуток $A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix}-\frac{11}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-\frac{11}{3})\cdot 1 & (-\frac{1}{6})\cdot 4 & \frac{17}{6}\cdot 1\\ (-\frac{1}{3})\cdot 1 & \frac{1}{6}\cdot 4 & \frac{1}{6}\cdot 1\\ \frac{7}{3}\cdot 1 & \frac{1}{3}\cdot 4 & (-\frac{5}{3})\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Отже $x_1=1.5$, $x_2=0.5$, $x_3=2$.

<u>Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.</u>

Система лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2)\end{cases}$

Знайдемо x_1 та x_2 методом алгебраїчного додавання для цього (1) помножимо на a_{22}, а (2) на a_{12}: $\begin{cases}a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}\\ a_{21}a_{12}x_1+a_{22}a_{12}x_2=b_2a_{12}\end{cases}$ віднімемо $a_{11}a_{22}x_1-a_{21}a_{12}x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$ звідки:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \qquad (3)$$

Аналогічно:

$$x_2=\frac{b2_1a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \qquad (4)$$

Чисельник і знаменник (3) і (4) можна записати через визначники, тобто

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}};\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{12} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}} \text{ або } x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де $\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ — визначник системи.

Якщо $\Delta\neq 0$, то x_1, x_2 — існують, розв'язок систем ($x_1;x_2$).

$\Delta=0$, $\Delta_1\neq 0$, $\Delta_2\neq 0$ — система розв'язків немає.

$\Delta=0$, $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$ — система має безліч розв'язків.

Визначник системи $\varDelta$ складається з коефіцієнтів невідомих, щоб одержати $\varDelta_1$ треба в $\varDelta$ замінити перший стовпець стовпцем вільних членів, а визначник $\varDelta_2$ одержуємо заміною в $\varDelta$ другого стовпця стовпцем вільних членів.

Алгоритм знаходження розв'язку системи рівнянь за формулами Крамера.

1. Знайти головний визначник системи, утворений з коефіцієнтів при невідомих;
   a) $\det A \neq 0$, виконуємо алгоритм далі;
   b) $\det A = 0$, то перевірити виконання умови:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{a_{13}}{a_{23}} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{31}} = \dfrac{a_{22}}{a_{32}} = \dfrac{a_{23}}{a_{33}} = \dfrac{b_2}{b_3} \end{cases}.$$

   Якщо виконується, то система має безліч розв'язків, в іншому випадку система немає розв'язків.
2. Шукаємо допоміжні визначники системи, замінивши у головному визначнику коефіцієнти при невідомому x_i стовпчиком вільних членів.
3. записати розв'язок системи у вигляді: $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ 4x_1 - 5x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -66; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -44$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

1. Обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 6 + 2\cdot 7\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 6\cdot 3 - 4\cdot 7\cdot 1 - 6\cdot 2\cdot 2 = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 25 & 6 & 7 \\ 17 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 25 & 7 \\ 1 & 17 & 6 \end{vmatrix} = 8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса — це метод послідовного виключення невідомих, його суть: систему рівнянь зводять до рівносильної системи з трикутною матрицею (матриця, в якій усі елементи, що розміщені нижче головної діагоналі рівні нулю). Такі дії називаються прямим ходом. З отриманої системи невідомі визначаються послідовною підстановкою (зворотній хід).

При виконанні прямого ходу можна робити перетворення: множити або ділити коефіцієнти і вільний член на одне і те саме число; додавати і віднімати рівняння; переставляти рівняння.

Приклад: Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Поміняємо місцями друге і перше рівняння і обираємо його за провідне і помножимо його на (-*4*) та додамо до другого, потім на (-*2*) і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Помножимо другий рядок на $\left(-\frac{7}{10}\right)$ і додамо до третього:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0.7 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1.9 & 3.8 \end{array}\right)$$ Даній розширеній матриці відповідає рівносиль до початкової система:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad x_2 + 0.7x_3 = 0.4 \\ \qquad 1.9x_3 = 3.8 \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} x_3 = \frac{3.8}{1.9} = 2 \\ x_2 + 0.7 \cdot 2 = 0.4 \\ x_1 + 3(-1) + 2 \cdot 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Отже відповідь (*1*; -*1*; *2*).