Лінії другого порядку

У даній главі вивчаються геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи з використанням канонічних рівнянь цих ліній. Названі лінії часто зустрічаються в різних питаннях природознавства. Наприклад, матеріальна точка у центральному полі тяжіння рухається вздовж однієї з цих ліній.

§1. Канонічне рівняння еліпса

Означення 1. Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами еліпса, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2. Для виведення канонічного рівняння еліпса виберемо на площині прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок O співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. За напрям осі абсцис візьмемо напрям від точки O до точки F_1 (рис. 1).

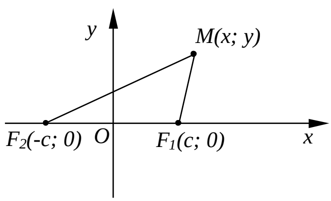

Рис. 1

Оскільки $F_1F_2 = 2c$, то у вибраній системі координат фокуси мають координати $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Тоді згідно з означенням 1

$$MF_1 + MF_2 = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка належить еліпсу. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням еліпса.

Будемо спрощувати рівняння (1). Передусім спробуємо звільнитись від радикалів. Перенесемо перший радикал у праву частину і піднесемо обидві частини до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\,.$$

Відокремимо радикал і розкриємо всі дужки. Звівши подібні члени і скоротивши рівняння на 4, отримуємо

$$cx - a^2 = -a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}\,.$$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата і перенесемо після цього члени, що містять x і y, в одну сторону, а вільні члени – в іншу. В результаті будемо мати

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2 .$$

Оскільки за умовою $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Позначимо

$$a^2-c^2=b^2. \tag{2}$$

Тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

З рівняння (1) ми отримали рівняння (3). Тому координати всіх точок еліпса поряд з рівнянням (1) задовольняють також і рівнянню (3). Доведемо обернене твердження: якщо числа x, y задовольняють рівнянню (3), то точка $M\left(x;\, y\right)$ належить еліпсу.

Нехай координати довільної точки $M\left(x;\, y\right)$ площини задовольняють рівнянню (3). Знайдемо відстані $\rho_1=MF_1$ і $\rho_2=MF_2$:

$$\rho_1=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2xc+c^2+b^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|.$$

Якщо $x\le 0$, то $a-\frac{c}{a}x>0$. Якщо ж $x>0$, то з (3) випливає, що $x\le a$. Тому $a-\frac{c}{a}x\ge a-\frac{c}{a}a=a-c>0$.

Отже, для всіх можливих значень x маємо, що $a-\frac{c}{a}x>0$ і

$$\rho_1=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=a-\frac{c}{a}x. \tag{4}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\rho_2=a+\frac{c}{a}x. \tag{5}$$

Таким чином, якщо координати точки M задовольняють рівнянню (3), то

$$MF_1+MF_2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)+\left(a+\frac{c}{a}x\right)=2a,$$

тобто точка M належить еліпсу. Цим самим доведемо, що рівняння (1), (3) рівносильні і рівняння (3) є рівнянням еліпса.

Означення 2. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням еліпса, а вибрана система координат – канонічною системою.

Розглянемо частинний випадок, коли фокуси F_1 і F_2 співпадають, тобто $c = 0$. Тоді з (2) випливає, що $a^2 = b^2$ і рівняння (3) набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням кола з центром у початку координат і радіусом a. Отже, якщо фокуси еліпса співпадають, то еліпс є колом.

Зауваження 1. Рівняння (3) отримано нами за умови, що у вибраній системі координат $a > b$. Проте рівняння (3) визначає еліпс і при $a < b$. Дійсно, проведемо перетворення координат, що полягає у зміні назв координатних осей. Тоді рівняння (3), в якому $a < b$, визначає еліпс із фокусами на осі Oy, а відстань від початку координат до фокусів дорівнює $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Нижче, якщо не обумовлено протилежне, будемо вважати, що в канонічному рівнянні еліпса $a > b$.

§2. Дослідження форми еліпса за допомогою канонічного рівняння

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

і точка $M_0(x_0; y_0)$ належить еліпсу, тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню (1) (рис. 1).

Оскільки змінна x входить до рівняння (1) з квадратом, то пара чисел $(-x_0; y_0)$ також задовольняє рівнянню (1). Це означає, що точка $M_1(-x_0; y_0)$ належить еліпсу. Точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(-x_0; y_0)$ відрізняються лише знаком абсциси, тобто є симетричними відносно осі Oy. Отже, кожній точці еліпса відповідає інша його точка, симетрична першій відносно осі Oy. Іншими словами, весь еліпс симетричний відносно осі Oy. Аналогічні міркування застосовні і до осі Ox.

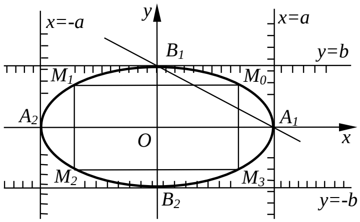

Рис. 1

Таким чином, внаслідок того, що змінні x і y входять до рівняння (1) з квадратом, еліпс є симетричним відносно координатних осей.

Якщо одночасно змінити знаки в x_0 і y_0, то числа $-x_0$, $-y_0$ також будуть задовольняти рівнянню (1). Точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M_2(-x_0; -y_0)$ симетричні відносно початку координат. Отже, кожній точці еліпса можна поставити у відповідність іншу його точку, симетричну першій відносно початку координат, тобто початок координат є центром симетрії еліпса. Тому будь-яка хорда еліпса, яка проходить через початок координат, ділиться в ньому пополам.

Візьмемо довільну пряму $y = kx$ (пряма проходить через початок координат) і знайдемо точки її перетину з еліпсом. Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2x^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2\left(b^2 + k^2a^2\right)}{a^2b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} \\ y = \pm\dfrac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} \end{cases}.$$

Отже, кожна пряма, яка проходить через початок координат, перетинає еліпс у двох точках, симетричних відносно початку координат:

$$C_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}},\ \frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}\right),$$
$$C_2 = \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}},\ -\frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}\right). \qquad (2)$$

Зокрема, вісь Ox перетинає еліпс у двох точках $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, а вісь Oy – у двох точках $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$.

Означення 1. Точки перетину еліпса з його осями симетрії називається вершинами еліпса.

Означення 2. Піввіссю еліпса називається відрізок (а також довжина цього відрізка), одним кінцем якого є центр симетрії еліпса, а другим – одна з його вершини.

У рівнянні (1) a і b – півосі еліпса, причому a називають більшою піввіссю, а b – меншою піввіссю.

Означення 3. Відрізок A_1A_2, кінцями якого є вершини A_1 і A_2 еліпса, розміщені на тій осі симетрії, що і фокуси еліпса (а також довжина $2a$ цього відрізка), називається більшою віссю еліпса, а відрізок B_1B_2 (і його довжина $2b$) – меншою віссю еліпса.

Знайдемо область визначення змінних x і y в рівнянні (1). Оскільки кожен з доданків лівої частини рівняння (1) не може бути від'ємним і в сумі ці доданки дають одиницю, то кожен з них окремо не може перевищувати одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 \le a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a,$$

$$\frac{y^2}{b^2} \le 1 \Leftrightarrow y^2 \le b^2 \Leftrightarrow -b \le y \le b.$$

Геометрично це означає, що всі точки еліпса знаходяться всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $x = -a$ і $x = a$, і всередині смуги, обмеженої паралельними прямими $y = -b$ і $y = b$. Тому весь еліпс знаходиться всередині прямокутника, що є перетином цих смуг (рис. 1).

Розв'яжемо рівняння (1) відносно y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{3}$$

Внаслідок симетрії еліпса достатньо дослідити тільки ту його частину, яка лежить у першому квадранті $\left(x \ge 0,\ y \ge 0\right)$. Для цього у формулі (3) перед радикалом запишемо знак плюс і будемо змінювати x від 0 до a. Якщо $x = 0$, то $y = b$. Зі збільшенням x підкореневий вираз в (3) зменшується, а тому буде зменшуватись і y. Якщо $x = a$, то $y = 0$. На геометричній мові це означає, що праворуч від точки B_1 еліпс весь час спадає, наближаючись до точки A_1. Приймаючи до уваги симетричність еліпса відносно координатних осей, робимо висновок, що еліпс є замкненою лінією.

Проведемо пряму через точки A_1 і B_1 (рис. 1). Рівняння цієї прямої

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}\left(a - x\right). \tag{4}$$

Покажемо, що ордината змінної точки еліпса (3) при $0 < x < a$ більша за ординату прямої (4), тобто

$$y_{ел.} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} > y_{пр.} = \frac{b}{a}\left(a - x\right).$$

Дійсно,

$$y_{ел} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + 2ax - x^2 - x^2} =$$
$$= \frac{b}{a}\sqrt{\left(a - x\right)^2 + 2x\left(a - x\right)} .$$

Другий доданок під радикалом додатний, оскільки $0 < x < a$. Якщо цей доданок відкинути, то радикал зменшиться:

$$y_{ел} > \frac{b}{a}\sqrt{\left(a - x\right)^2} = \frac{b}{a}\left|a - x\right| = \frac{b}{a}\left(a - x\right) = y_{пр} .$$

Отже, ми показали, що між точками B_1 і A_1 еліпс розміщується над прямою A_1B_1.

Наведених вище міркувань достатньо, щоб накреслити еліпс. Еліпс показано на рис. 1.

§3. Ексцентриситет і директриси еліпса

Еліпси бувають різної форми, а саме, більш або менш витягнутими. Форму еліпса характеризують наступним числом.

<u>**Означення 1**</u>. Відношення половини відстані між фокусами еліпса (фокальної відстані) до більшої півосі еліпса називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається буквою e:

$$e = \frac{c}{a} . \tag{1}$$

Оскільки $0 \le c < a$, то $0 \le e < 1$.

Підставимо значення c з формули (2) §1 у формулу (1):

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} . \tag{2}$$

Отже, ексцентриситет еліпса визначається відношенням його півосей. Навпаки, знаючи ексцентриситет, завжди можна знайти відношення півосей еліпса.

Розглянемо систему еліпсів з однією і тією ж більшою віссю, але різними ексцентриситетами. З рівності (2) випливає, що зі зменшенням e число b збільшується і при $e = 0$ $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло. При цьому

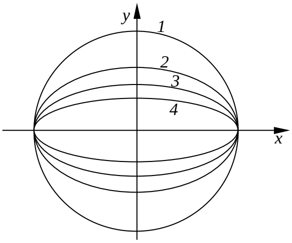

Рис. 1

$c = 0$, тобто фокуси співпадають з центром кола. Навпаки, зі збільшенням ексцентриситету число b зменшується і еліпс стає більш витягнутим. На рис. 1 показано еліпси, ексцентриситети яких задовольняють нерівності $0 = e_1 < e_2 < e_3 < e_4$. Якщо e прямує до одиниці, число b прямує до нуля.

<u>Означення 2</u>. Дві прямі, які проходять перпендикулярно до осі еліпса, що містить його фокуси, на відстані $\frac{a}{e}$ від центра еліпса, називаються ***директрисами*** еліпса. Тут, як і раніше, a – більша піввісь еліпса, а e – його ексцентриситет.

Коло, для якого $e = 0$, не має директрис. Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

причому $a > b$. Фокуси F_1 і F_2 розміщені на осі Ox. Оскільки $0 \le e < 1$,

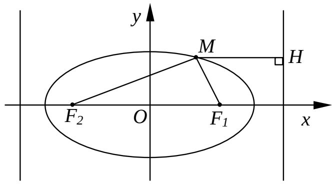

Рис. 2

то $\frac{a}{e} > a$. Тому директриси не перетинають еліпс, тобто знаходяться далі від центра еліпса, ніж його вершини (рис. 2). Рівняння директрис мають вигляд

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{і} \quad x = \frac{a}{e}.$$

<u>Означення 3</u>. Фокус і директрису, які знаходяться по один бік від меншої осі еліпса, будемо називати такими, що відповідають одне одному.

За означенням фокусу $F_1(c;\,0)$ відповідає директриса $x = \frac{a}{e}$, а фокусу $F_2(-c;\,0)$ – директриса $x = -\frac{a}{e}$ (рис. 2).

<u>Означення 4</u>. Відрізки F_1M і F_2M (рис. 2) називаються фокальними радіусами точки M еліпса.

Згідно з формулами (4) і (5) §1 фокальні радіуси точки M еліпса визначаються формулами

$$\rho_1 = F_1M = a - \frac{c}{a}x = a - ex, \qquad (3)$$

$$\rho_2 = F_2M = a + \frac{c}{a}x = a + ex. \qquad (4)$$

Теорема 1 (директоріальна властивість еліпса). Еліпс – це геометричне місце точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса еліпса і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету еліпса.

Доведення. Розглянемо фокус $F_1(c;\,0)$ і відповідну йому директрису $x = \frac{a}{e}$. Візьмемо довільну точку $M(x;\,y)$ еліпса (рис. 2) і знайдемо відстані F_1M і $d_1 = MH$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x = \frac{a}{e}$. Згідно з формулою (3) $F_1M = a - ex$. Відстань $d_1 = MH$ знаходимо за формулою (8) §7 гл. XIII:

$$d_1 = MH = \frac{\left|x - \frac{a}{e}\right|}{\sqrt{1+0}} = \left|\frac{ex-a}{e}\right| = \frac{a-ex}{e} = \frac{F_1M}{e}.$$

Звідси $\frac{F_1M}{d_1} = \frac{F_1M}{F_1M/e} = e$. Аналогічно доводиться, що $\frac{F_2M}{d_2} = e$, де F_2M – відстань від точки M еліпса до його фокуса F_2, а d_2 – відстань від цієї ж точки до директриси $x = -\frac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\,y)$ площини $\frac{F_1M}{MH} = e$, де H – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x = \frac{a}{e}$. Оскільки $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $MH = \left|x - \frac{a}{e}\right|$, то $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{a}{e}\right|$. Піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x^2 - 2\frac{xa}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2xae + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \Leftrightarrow \quad .$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Цим показано, що кожна точка геометричного місця точок належить еліпсу. Теорему доведено.

Приклад 1. Записати рівняння директрис еліпса $4x^2+9y^2=144$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 144. В результаті будемо мати канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Звідси

$$a^2=36 \Leftrightarrow a=6,$$

$$b^2=16 \Leftrightarrow b=4.$$

Знаючи a і b, із співвідношення $a^2-b^2=c^2$ знаходимо

$$c=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}\,.$$

Ексцентриситетом еліпса є число

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

Тому рівняння директрис мають вигляд

$$x=\frac{a}{e}=\frac{6}{\sqrt{5}/3}=\frac{18}{\sqrt{5}} \quad \text{і} \quad x=-\frac{a}{e}=-\frac{18}{\sqrt{5}}\,.$$

§4. Рівняння дотичної до еліпса. Оптична властивість еліпса

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

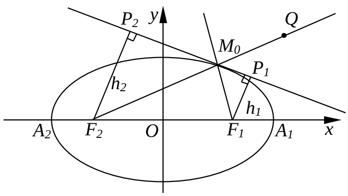

Рис. 1

і точка $M_0(x_0,\, y_0)$ лежить на еліпсі. Будемо вважати, що $y_0 \neq 0$, тобто точка M_0 не співпадає з вершинами A_1 і A_2 (рис. 1).

Розглянемо достатньо малу частину еліпса, що містить точку M_0, як графік функції

$$y=y(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

і продиференціюємо по x обидві частини рівності

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(y(x)\right)^2}{b^2}=1.$$

В результаті отримуємо

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Звідси випливає, що кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса у точці M_0 дорівнює

$$k=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0},$$

а рівняння цієї дотичної приймає вигляд

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \quad (1)$$

Тут враховано, що точка $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ лежить на еліпсі, тобто

$$\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=1.$$

При виведенні рівняння (1) з розгляду виключались вершини еліпса A_1 і A_2 (рис. 1). Проте це рівняння є рівнянням дотичної до еліпса і в точках A_1 і A_2. Дійсно, якщо точка M_0 співпадає з вершиною A_1, то $x_0=a$, $y_0=0$ і рівняння (1) набуває вигляду $x=a$, тобто перетворюється у рівняння дотичної до еліпса в точці A_1. Аналогічно, при співпаданні точок M_0 і A_2 рівняння (1) перетворюється у рівняння дотичної до еліпса в точці A_2.

Отже, рівняння дотичної до еліпса у довільній його точці $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ має вигляд (1).

Теорема 1. Дотична до еліпса у довільній його точці M_0 є бісектрисою зовнішнього кута M_0 трикутника $F_1F_2M_0$, тобто трикутника з вершинами у фокусах еліпса F_1, F_2 і точці M_0 (рис. 1).

Доведення. Знайдемо за формулою (8) § 7 гл. XIII відстані h_1 і h_2 від фокусів $F_1\left(c;\, 0\right)$ і $F_2\left(-c;\, 0\right)$ еліпса до дотичної до еліпса у точці $M_0\left(x_0,\, y_0\right)$:

$$h_1 = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 - a|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,a} = \frac{a - ex_0}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,a} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,a},$$

$$h_2 = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{a + ex_0}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,a} = \frac{\rho_2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}\,a},$$

де ρ_1 і ρ_2 визначаються формулами (3) і (4) §3.

Тоді $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Відмітимо, що числа $\frac{cx_0}{a^2} - 1$ і $\frac{-cx_0}{a^2} - 1$, які отримуються в результаті підстановок координат фокусів $F_1(c;\,0)$ і $F_2(-c;\,0)$ у ліву частину рівняння дотичної, є числами одного знака. Дійсно,

$$\frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{ex_0}{a} - 1 = -\frac{a - ex_0}{a} = -\frac{\rho_1}{a} < 0,$$

$$\frac{-cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{ex_0}{a} - 1 = -\frac{ex_0 + a}{a} = -\frac{\rho_2}{a} < 0.$$

Це означає, що обидва фокуси F_1 і F_2 розміщуються по один бік від дотичної до еліпса у довільній його точці.

Позначимо через P_1 і P_2 основи перпендикулярів, опущених з точок F_1 і F_2 на дотичну до еліпса, проведену в точці M_0 (рис. 1). Тоді трикутники $F_1P_1M_0$ і $F_2P_2M_0$ будуть подібними ($\Delta F_1P_1M_0 \sim \Delta F_2P_2M_0$), оскільки обидва вони прямокутні і згідно з доведеним

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0}.$$

Звідси випливає рівність кутів $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$, а, отже, і рівність кутів $\angle F_1M_0P_1 = \angle P_1M_0Q$, де точка Q лежить на продовженні променя F_2M_0 за точку M_0.

Отже, дотична до еліпса в точці M_0 є бісектрисою зовнішнього кута M_0 трикутника $F_1F_2M_0$.

Теорему доведено.

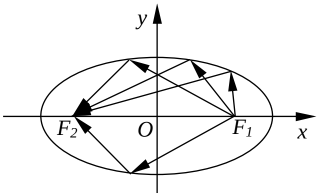

Рис. 2

Доведену теорему можна наділити наступним фізичним змістом: якщо розмістити в одному з фокусів еліпса джерело світла, то промені світла після відбиття від еліпса будуть збиратися у другому фокусі еліпса, оскільки промінь світла відбивається від еліпса як від дотичної до нього в точці падіння променя (рис. 2).

Приклад 1. Написати рівняння дотичних до еліпса

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{12}=1,$$

проведених з точки $A(12;-3)$.

Розв'язання. Точка A не лежить на еліпсі, оскільки

$$\frac{12^2}{32}+\frac{3^2}{12}=\frac{144}{32}+\frac{9}{12}\neq 1.$$

Нехай $\frac{x_0 x}{32}+\frac{y_0 y}{18}=1$ є шуканим рівнянням дотичної, де $(x_0;\, y_0)$ – точка дотику. Оскільки точка $A(12;-3)$ лежить на дотичній, то

$$\frac{12x_0}{32}-\frac{3y_0}{18}=1 \Leftrightarrow 9x_0-4y_0=24.$$

Точка дотику $(x_0;\, y_0)$ лежить на даному еліпсі, тому

$$\frac{x_0{}^2}{32}+\frac{y_0{}^2}{18}=1 \Leftrightarrow 9x_0{}^2+16y_0{}^2=288.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 9x_0-4y_0=24 \\ 9x_0{}^2+16y_0{}^2=288, \end{cases}$$

знаходимо два її розв'язки

$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{4}{5} \\ y_2=-\dfrac{21}{5}. \end{cases}$$

Шуканих дотичних дві:

$$\frac{4x}{32}+\frac{3y}{18}=1 \Leftrightarrow 3x+4y-24=0,$$

$$\frac{\frac{4}{5}x}{32}-\frac{\frac{21}{5}y}{18}=1 \Leftrightarrow 3x-28y-120=0.$$

§5. Еліпс як результат стиску кола до його діаметра. Параметричні рівняння еліпса

5.1. Розглянемо наступне перетворення площини (рис. 1): кожна точка M площини переходить у точку M' цієї площини, що лежить з точкою M на одному перпендикулярі до осі Ox і відношення

$$\frac{PM}{PM'} = k \tag{1}$$

залишається величиною сталою для всіх точок M.

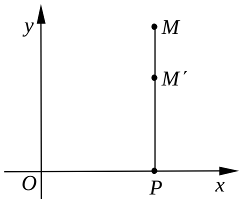

Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Перетворення точок площини, при якому кожній точці M ставиться у відповідність точка M' описаним вище способом, називається рівномірним стиском площини до осі Ox. Число k називається коефіцієнтом стиску, точка M' – образом точки M, а точка M – прообразом точки M' при рівномірному стиску площини до осі Ox.

Якщо координати довільної точки M позначати через x і y, а координати її образа (точки M') – через x' і y', то

$$\begin{cases} x = x' \\ \dfrac{y}{y'} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = ky'. \end{cases} \tag{2}$$

Формули (2) є формулами рівномірного стиску площини до осі Ox. Якщо $k > 0$, то точки M і M' лежать по один бік від осі Ox, а якщо $k < 0$, то по різні боки. При $|k| > 1$ всі точки наближаються до осі Ox, а при $|k| < 1$ – віддаляються від цієї осі. В останньому випадку правильніше було б говорити не про “стиск”, а про “розтягування” площини. Проте в обох випадках перетворення називають стиском до осі Ox.

При перетворенні (2) кожна точка M осі Ox співпадає зі своїм образом M'. Те ж саме, але для всіх точок площини, будемо мати у випадку, коли $k = 1$. Якщо $k = -1$, отримуємо симетрію відносно осі Ox.

Теорема 1. При рівномірному стиску площини до діаметра кола образом кола є еліпс.

Навпаки, кожен еліпс можна отримати як образ кола при рівномірному стиску площини до діаметра цього кола.

<u>*Доведення*</u>. Розглянемо коло

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{3}$$

з центром у початку координат і радіусом a (рис. 2).

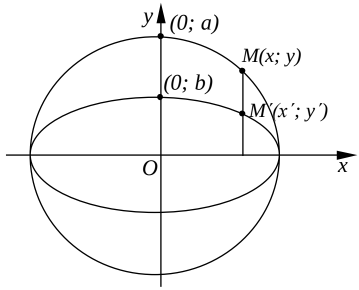

Рис. 2

Виконаємо рівномірний стиск площини до осі Ox з коефіцієнтом стиску $k>1$. Нехай при цьому образом точки $(0; a)$ є точка $(0; b)$. Тоді $k=\dfrac{a}{b}$ і формули (2) приймають вигляд

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{a}{b}y'. \end{cases} \qquad (4)$$

Підставимо (4) в (3):

$$(x')^2+\frac{a^2}{b^2}(y')^2=a^2 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1. \qquad (5)$$

Отже, при перетворенні стиску коло перетворюється в еліпс з півосями a і b (рис. 2).

Навпаки, будь-який еліпс (5) можна отримати як результат рівномірного стиску кола. Дійсно, нехай задано еліпс (5), де $a>b$. Побудуємо коло з центром у початку координат і радіусом a. Якщо координати x' і y' задовольняють рівнянню (5), то координати (4) будуть задовольняти рівнянню (3), тобто рівнянню побудованого кола. Отже, побудовано коло, результатом рівномірного стиску якого є даний еліпс.

Теорему доведено.

5.2. Перейдемо до виведення параметричних рівнянь еліпса.

Нехай еліпс задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (6)$$

Розглянемо коло

$$X^2+Y^2=a^2, \qquad (7)$$

яке переходить у даний еліпс в результаті стиску

$$X=x,\ Y=\frac{a}{b}y.$$

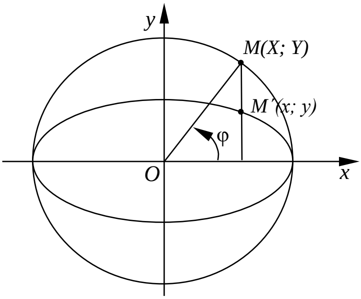

Рис. 3

Тут координати образа точки M ми позначили через x і y, а координати прообраза точки M' – через X і Y (рис. 3).

Нехай $M'(x; y)$ – довільна точка даного еліпса (6), а $M(X;Y)$ – її прообраз на колі (7).

Позначимо через φ кут між додатним напрямком осі Ox і променем OM. Тоді

$$X = a\cos\varphi, \quad Y = a\sin\varphi$$

і

$$x = a\cos\varphi, \; y = \frac{b}{a}Y = \frac{b}{a}a\sin\varphi = b\sin\varphi.$$

Рівняння

$$x = a\cos\varphi, \; y = b\sin\varphi \tag{8}$$

є параметричними рівняннями еліпса.

Означення 2. Параметр φ називається ексцентричним кутом точки еліпса.

Якщо задано точку M' еліпса, то для знаходження φ потрібно побудувати коло на більшій осі еліпса, як на діаметрі, і через точку M' провести пряму, паралельну меншій осі еліпса. Точка $M(X;Y)$ перетину цієї прямої з колом буде прообразом точки $M'(x; y)$ при рівномірному стиску площини до діаметра кола. Кут між віссю Ox і променем OM буде ексцентричним кутом φ, що відповідає вибраній точці M' на еліпсі (рис. 3).

§6. Канонічне рівняння гіперболи

Означення 1. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Позначимо цю сталу через $2a$, відстань між фокусами еліпса – через $2c$, а самі фокуси – через F_1 і F_2.

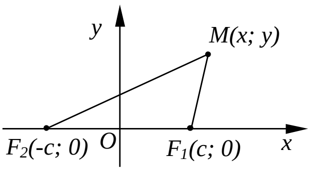

Рис. 1

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат так, щоб початок O співпадав з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис – з прямою F_1F_2. Напрямки осей Ox і Oy візьмемо такими, як показано на рис. 1.

У вибраній системі координат фокус F_1 має координати $(c; 0)$, а фокус F_2 – координати $(-c; 0)$.

Якщо $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи, то за означенням 1

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \Leftrightarrow \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a. \qquad (1)$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка буде точкою гіперболи. Тому у вибраній системі координат рівняння (1) є рівнянням гіперболи. Щоб спростити це рівняння, перепишемо його у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

і обидві частини піднесемо до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \Leftrightarrow \mp\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Ще раз піднесемо останню рівність до квадрата:

$$(x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.$$

На відміну від еліпса, тепер $a < c$. Якщо ввести позначення

$$c^2 - a^2 = b^2, \qquad (2)$$

то попереднє рівняння можна перетворити до вигляду

$$-\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (3)$$

Рівняння (3) отримано нами з рівняння (1). Тому координати довільної точки гіперболи задовольняють рівнянню (3).

Доведемо протилежне: якщо координати деякої точки $M(x;\,y)$ задовольняють рівнянню (3), то ця точка лежить на гіперболі, тобто

$$\left|MF_1-MF_2\right|=2a\,.$$

Для цього знайдемо відстані $\rho_1=MF_1$ і $\rho_2=MF_2$:

$$\rho_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|.$$

З рівності (3) випливає, що $|x|\ge a$. Дійсно, розв'язавши (3) відносно y, отримуємо вираз

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,,$$

який має смисл тоді і тільки тоді, коли $|x|\ge a$.

Нехай $x>0$. Тоді $\frac{c}{a}x-a>0$ і $\rho_1=\frac{c}{a}x-a$. Якщо $x<0$, то $\frac{c}{a}x-a<0$ і тому $\rho_1=a-\frac{c}{a}x$.

Отже, для всіх допустимих x маємо:

$$\begin{aligned}&\text{якщо } x>0, \quad \text{то} \quad \rho_1=\frac{c}{a}x-a\,,\\ &\text{якщо } x<0, \quad \text{то} \quad \rho_1=a-\frac{c}{a}x\,.\end{aligned} \qquad (4)$$

Аналогічно доводяться наступні твердження:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } x > 0, \quad \text{то} \quad \rho_2 = \frac{c}{a}x + a, \\ &\text{якщо } x < 0, \quad \text{то} \quad \rho_2 = -\frac{c}{a}x - a. \end{aligned} \tag{5}$$

Тому для $x \geq a$

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{c}{a}x - a - \frac{c}{a}x - a = -2a.$$

Якщо ж $x \leq -a$, то

$$\rho_1 - \rho_2 = a - \frac{c}{a}x + \frac{c}{a}x + a = 2a.$$

В обох випадках $|\rho_1 - \rho_2| = 2a$.

Отже, ми довели, що рівняння (3) є рівнянням гіперболи.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням гіперболи, а вибрана система координат – канонічною системою координат.

§7. Дослідження форми гіперболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Оскільки координати x і y входять до рівняння (1) з квадратом, то шляхом міркувань, аналогічних міркуванням §2 для еліпса, доводиться, що осі Ox і Oy є осями симетрії гіперболи, яку задано рівнянням (1), а початок координат – центром симетрії цієї гіперболи.

Розв'яжемо рівняння (1) відносно x

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}. \tag{2}$$

і відносно y

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3}$$

З (2) випливає, що y може приймати всі значення від $-\infty$ до $+\infty$. З (3) випливає, що

$$x^2 \ge a^2 \Leftrightarrow |x| \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a] \cup [a, \infty).$$

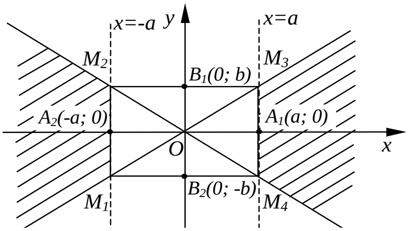

Рис. 1

Іншими словами, x може приймати всі значення, крім значень, що містяться між $-a$ і a (рис. 1). Тому гіпербола розміщується поза смугою, утвореною прямими $x=-a$ і $x=a$. Уверх і донизу вона простягається необмежено, оскільки y може змінюватись від $-\infty$ до ∞.

Вісь Ox перетинає гіперболу у двох точках $A_1(a; 0)$ і $A_2(-a; 0)$. Вісь Oy не перетинає гіперболу в жодній точці, оскільки рівняння (1) при $x=0$ має суто уявні розв'язки $\pm bi$.

<u>Означення 1</u>. Точки A_1 і A_2 називаються вершинами гіперболи, відрізок A_1A_2 – дійсною віссю гіперболи, а відрізок B_1B_2 (рис. 1) – уявною віссю гіперболи. Числа a і b у канонічному рівнянні (1) гіперболи називаються відповідно дійсною і уявною півосями гіперболи.

Розглянемо питання про взаємне розміщення гіперболи і прямої, що проходить через початок координат. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(b^2 - k^2a^2\right) = a^2b^2 \\ y = kx. \end{cases} \tag{4}$$

Можливі три випадки:

1°. $b^2 - k^2a^2 > 0$. У цьому випадку пряма $y = kx$ перетинає гіперболу (1) у двох точках

$$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}; \frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right) \quad \text{і} \quad \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}; -\frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right),$$

симетричних відносно початку координат.

2º. $b^2 - k^2a^2 = 0$. У цьому випадку система (4) не має ні дійсних, ні комплексних розв'язків, тобто є несумісною. Геометрично це означає, що пряма $y = kx$ не перетинає гіперболу.

3º. $b^2 - k^2a^2 < 0$. Система (4) має комплексні розв'язки. Отже, і в цьому випадку пряма $y = kx$ не перетинає гіперболу.

Дослідимо розміщення прямої $y = kx$ для кожного з розглянутих випадків, врахувавши, що $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між віссю Ox і цією прямою. Маємо:

1º. $k^2a^2 < b^2 \Leftrightarrow k^2 < \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} < \operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$.

2º. $k^2a^2 = b^2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{b}{a} \\ k_2 = -\frac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

3º. $k^2a^2 > b^2 \Leftrightarrow k^2 > \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \frac{b}{a} \\ k < -\frac{b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha > \frac{b}{a} \\ \operatorname{tg}\alpha < -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$

Побудуємо прямокутник, сторони $2a$ і $2b$ якого паралельні осям координат, а центр співпадає з початком координат. На рис. 1 це прямокутник з вершинами у точках M_1, M_2, M_3, M_4. Випадку **1º** відповідають прямі, які розміщуються всередині горизонтальних кутів M_1OM_2 і M_3OM_4. Випадку **2º** відповідають дві прямі M_1M_3 і M_2M_4, які є діагоналями прямокутника $M_1M_2M_3M_4$. Випадку **3º** відповідають прямі, які розміщуються всередині вертикальних кутів M_2OM_3 і M_1OM_4.

Отже, серед прямих, які проходять через початок координат, тільки ті перетинають гіперболу, які розміщуються всередині кутів M_1OM_2 і M_3OM_4.

Зіставляючи всі попередні дослідження, приходимо до висновку, що гіпербола всіма своїми точками розміщується в області, яку на рис. 1 заштриховано. Звідси випливає, що гіпербола на відміну від еліпса складається з двох віток, симетричних одна одній відносно осі Oy.

Розглянемо прямі, що відповідають випадку **2º** і визначають межі області, в якій знаходиться гіпербола.

<u>**Означення 2**</u>. Прямі, що проходять через початок канонічної системи координат і мають кутові коефіцієнти $\frac{b}{a}$ і $-\frac{b}{a}$, називаються асимптотами гіперболи.

Наступна теорема пояснює смисл терміна "асимптота".

Теорема 1. Точки гіперболи при віддалені від осі Oy необмежено (асимптотично) наближаються до відповідних асимптот, тобто відстань між точкою гіперболи і відповідною асимптотою зі збільшенням x зменшується, прямує до нуля, але не досягає нуля.

<u>*Доведення*</u>. Оскільки гіпербола симетрична відносно осей координат, то теорему достатньо довести для тієї її частини, яка знаходиться у першому квадранті (рис. 2).

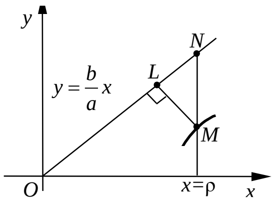

Рис. 2

Візьмемо довільне $x = \rho > a$. Йому відповідає точка $M\left(\rho; \frac{b}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2}\right)$ гіперболи (1) (див. (3)) і точка $N\left(\rho; \frac{b}{a}\rho\right)$ асимптоти $y = \frac{b}{a}x$.

Оскільки $\frac{b}{a}\rho > \frac{b}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2}$, то точка N лежить вище точки M (рис. 2) і

$$MN = \frac{b}{a}\rho - \frac{b}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2}\ . \qquad (5)$$

Будемо досліджувати поведінку довжини відрізка MN при необмеженому зростанні ρ. Оскільки зі збільшенням ρ обидва члени правої частини (5) збільшуються, то незрозуміло, що відбувається з їх різницею. Тому спочатку перетворимо вираз (5):

$$MN=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho-\sqrt{\rho^2-a^2}\right)\left(\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{\frac{b}{a}\left(\rho^2-\rho^2+a^2\right)}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=\frac{ab}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}\,.$$

Звідси очевидно, що

$$\lim_{\rho\to\infty} MN=\lim_{\rho\to\infty}\frac{ab}{\rho+\sqrt{\rho^2-a^2}}=0\,. \tag{6}$$

Нехай ML – відстань від точки M до відповідної асимптоти (рис. 2). Оскільки $ML<MN$, то згідно з (6) довжина відрізка ML прямує до нуля при $\rho\to\infty$.

Теорему доведено.

Зображення гіперболи за її канонічним рівнянням (1) рекомендується виконувати так (рис. 3): спочатку будують прямокутник з центром у початку координат і зі сторонами $2a$ і $2b$, паралельними відповідно осями Ox і Oy. Прямі, що з'єднують протилежні вершини цього прямокутника, є асимптотами гіперболи. Потім креслять вітки гіперболи: ліва вітка повинна дотикатись прямокутника зовні в точці A_2 (вершині гіперболи) і своїми "кінцями" наближатися до асимптот; права вітка дотикається прямокутника зовні в іншій вершині гіперболи – точці A_1 і своїми "кінцями" наближається до асимптот. Побудову віток гіперболи потрібно проводити симетрично осям координат.

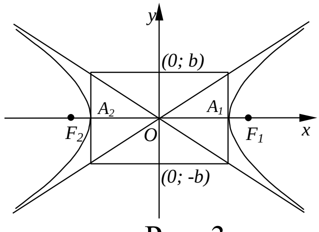

Рис. 3

§8. Ексцентриситет і директриси гіперболи

<u>Означення 1</u>. Число $e=\dfrac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи. Дві прямі, що проходять на відстані $\dfrac{a}{e}$ від центра гіперболи перпендикулярно її дійсній осі, називаються директрисами гіперболи.

Оскільки $0<a<c$, то $e>1$. Тому $\dfrac{a}{e}<a$ і відстань від центра гіперболи до директрис менша за довжину дійсної півосі (рис. 1).

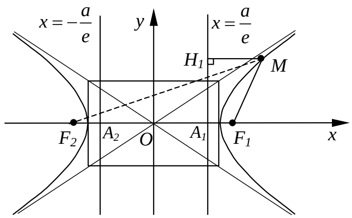

Рис. 1

Рівняння директрис мають вигляд

$$x=\frac{a}{e} \text{ і } x=-\frac{a}{e}.$$

<u>Означення 2</u>. Фокус і директрису гіперболи, які розміщені по один бік від уявної осі, назвемо такими, що відповідають одне одному.

Згідно з означенням 2 фокусу $F_1(c;0)$ відповідає директриса $x=\dfrac{a}{e}$, а фокусу $F_2=(-c;0)$ – директриса $x=-\dfrac{a}{e}$.

<u>Означення 3</u>. Відрізки F_1M і F_2M називаються фокальними радіусами точки M гіперболи (рис. 1).

Формули (4) і (5) §6 можна тепер записати у вигляді:

Якщо $x\ge a$, то $\rho_1=ex-a$, $\rho_2=ex+a$; (1)

Якщо $x\le -a$, то $\rho_1=a-ex$, $\rho_2=-ex-a$. (2)

Теорема 1 (директоріальна властивість гіперболи). Гіпербола є геометричним місцем точок, відношення відстаней від кожної з яких до фокуса гіперболи і до відповідної цьому фокусу директриси є величиною сталою і такою, що дорівнює ексцентриситету гіперболи.

<u>Доведення</u>. Нехай

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

– рівняння даної гіперболи, а F_1 і $x=\frac{a}{e}$ – фокус і директриса, що відповідають одне одному. Візьмемо довільну точку $M(x;\, y)$ гіперболи і знайдемо відстані F_1M і MH_1, де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на директрису $x=\frac{a}{e}$ (рис. 1).

Якщо $x>0$, то відстань ρ_1 від точки $M(x;\, y)$ до фокуса $F_1(c;\, 0)$ згідно з формулою (1) дорівнює

$$F_1M=\rho_1=ex-a.$$

Відстань MH_1 знаходимо за формулою (8) §7 гл. XIII:

$$MH_1=\left|x-\frac{a}{e}\right|=\left|\frac{ex-a}{e}\right|=\frac{ex-a}{e}.$$

Отже,

$$\frac{F_1M}{MH_1}=\frac{ex-a}{\frac{ex-a}{e}}=e.$$

Якщо $x<0$, то згідно з (2)

$$F_1M=a-ex,$$

а $MH_1=\frac{|ex-a|}{e}=\frac{a-ex}{e}$, оскільки $x<a$. Тому і в цьому випадку

$$\frac{F_1M}{MH_1}=\frac{a-ex}{\frac{a-ex}{e}}=e.$$

Аналогічно доводиться, що

$$\frac{F_2M}{MH_2}=e,$$

де $F_2M = \rho_2$ – відстань від точки $M(x;\, y)$ гіперболи до її фокуса $F_2(-c;\, 0)$, а MH_2 – відстань від тієї ж точки M до директриси $x = -\frac{a}{e}$, що відповідає фокусу F_2.

Навпаки, нехай для точки $M(x;\, y)$ площини

$$\frac{MF_1}{MH_1} = e\,, \qquad (3)$$

де H_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму $x = \frac{a}{e}$.

Оскільки

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,, \quad MH_1 = \frac{|ex-a|}{e}\,,$$

то рівність (3) приймає вигляд

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{|ex-a|}{e}} = e \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = |ex-a|\,.$$

Після піднесення останньої рівності до квадрата, отримуємо:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2xae + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-e^2\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \text{ оскільки } a^2 - c^2 = -b^2\,.$$

Отже, кожна точка геометричного місця є точкою гіперболи. Теорему доведено.

Приклад 1. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і рівняння асимптот гіперболи

$$4x^2 - 9y^2 = 36\,.$$

Розв’язання. Запишемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\,.$$

Тому $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$; $b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ і $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Фокуси F_1 і F_2 мають координати $F_1\left(\sqrt{13};\,0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{13};\,0\right)$. Ексцентриситет дорівнює $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{13}{3}}$. Рівняннями директрис є

$$x=\frac{a}{e}=\frac{3}{\sqrt{13}/3}=\frac{9}{\sqrt{13}} \quad \text{і} \quad x=-\frac{9}{\sqrt{13}},$$

а асимптоти гіперболи визначаються рівнянням

$$y=\frac{b}{a}x=\frac{2}{3}x \quad \text{і} \quad y=-\frac{2}{3}x.$$

§9. Рівняння дотичної до гіперболи. Оптична властивість гіперболи

Рівняння дотичної до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

у точці $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ знаходиться з використанням тих же міркувань, що й у випадку з еліпсом (див. §4), і має вигляд

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{2}$$

Рекомендується провести необхідні викладки і отримати рівняння (2) самостійно.

Теорема 1. Дотична до гіперболи у довільній її точці M_0 є бісектрисою внутрішнього кута M_0 трикутника $F_1M_0F_2$, що має своїми вершинами фокуси гіперболи і дану точку M_0.

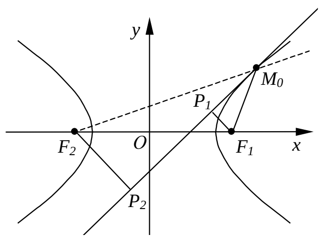

Рис. 1

<u>*Доведення.*</u> Нехай гіперболу задано канонічним рівнянням (1). Рівняння дотичної (2) до гіперболи у точці $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ запишемо у вигляді

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0. \tag{3}$$

Нехай для визначеності $x_0>0$, тобто точка M_0 належить правій вітці гіперболи (1) (рис. 1). У випадку $x_0<0$ доведення проводиться аналогічно.

Підставимо координати точок $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ у ліву частину рівняння (3). В результаті будемо мати числа різних знаків. Дійсно,

$$d_1 = \frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{ex_0 - a}{a} = \frac{\rho_1}{a} > 0\,,$$

$$d_2 = -\frac{cx_0}{a^2} - 1 = -\frac{ex_0 + a}{a} = -\frac{\rho_2}{a} < 0\,.$$

Тут ми скористались формулами (1) §8. Отже, фокуси F_1 і F_2 знаходяться по різні боки від дотичної.

Нехай P_1 і P_2 – ортогональні проекції фокусів F_1 і F_2 на дотичну (3). За формулою (8) §7 гл. XIII знаходимо відстані F_1P_1 і F_2P_2 від фокусів $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ гіперболи до дотичної (3):

$$F_1P_1 = \frac{\left|\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}} = \frac{ex_0 - a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}} = \frac{\rho_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}}\,,$$

$$F_2P_2 = \frac{\left|-\dfrac{x_0c}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}} = \frac{\left|-(ex_0 + a)\right|}{a\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}} = \frac{\rho_2}{a\sqrt{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^4} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{b^4}}}\,.$$

Відношення цих відстаней дорівнює

$$\frac{F_1P_1}{F_2P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_1M_0}{F_2M_0}\,. \tag{4}$$

З рівностей (4) випливає, що прямокутні трикутники $F_1P_1M_0$ і $F_2P_2M_0$ подібні. Тому $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0P_2$, тобто дотична є бісектрисою внутрішнього кута M_0 трикутника $F_1M_0F_2$.

Теорему доведено.

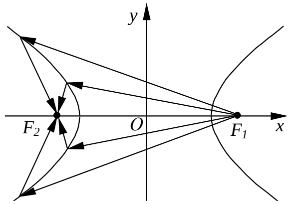

Рис. 2

Доведену теорему можна наділити "оптичним" тлумаченням аналогічно тому, як це було зроблено для еліпса: якщо помістити в один із фокусів гіперболи джерело світла, то промені після відбиття від гіперболи зберуться у другому фокусі (рис. 2)

Приклад 1. Скласти рівняння дотичних до гіперболи

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1, \tag{5}$$

які перпендикулярні прямій

$$4x+3y-7=0\ . \tag{6}$$

Розв'язання. Позначимо через $(x_0;\ y_0)$ точку дотику. Тоді рівняння дотичної в цій точці матиме вигляд

$$\frac{xx_0}{20}-\frac{yy_0}{5}=1. \tag{7}$$

Кутові коефіцієнти прямих (6) і (7) дорівнюють відповідно

$$k_1=-\frac{4}{3}\,,\ k_2=\frac{x_0}{4y_0}\,.$$

Оскільки прямі (6) і (7) за умовою перпендикулярні, то згідно з формулою (7) §9 гл. XIII

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{x_0}{4y_0}=-1 \Leftrightarrow x_0=3y_0\ . \tag{8}$$

Точка $(x_0;\ y_0)$ лежить на гіперболі (5). Тому, враховуючи (8),

$$\frac{9{y_0}^2}{20}-\frac{{y_0}^2}{5}=1 \Leftrightarrow {y_0}^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=-2. \end{array}\right.$$

Отже, маємо дві точки дотику $M_1(6;\ 2)$ і $M_2(-6;\ -2)$, які симетричні відносно початку координат.

Тепер можна записати рівняння дотичних до гіперболи (5) у точках M_1 і M_2:

$$\frac{6x}{20}-\frac{2y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x-4y-10=0\,,$$

$$-\frac{6x}{20}+\frac{2y}{5}=1 \Leftrightarrow 3x-4y+10=0\,\cdot$$

§10. Параметричні рівняння гіперболи

Нехай гіперболу задано її канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{1}$$

Рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

Покладемо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t, \qquad (2)$$

де $t\neq 0$. Тоді

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{t}. \qquad (3)$$

Почленним додаванням і відніманням рівностей (2) і (3) знаходимо

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right). \qquad (4)$$

Отже, координати $(x; y)$ довільної точки гіперболи можна подати у вигляді (4). Навпаки, для будь-якого $t\neq 0$ точка з координатами (4) лежить на гіперболі. Дійсно, підставляючи (4) в (1), отримуємо

$$\frac{a^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}{4a^2}-\frac{b^2\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}{4b^2}=\frac{t^2+2+\frac{1}{t^2}-t^2+2-\frac{1}{t^2}}{4}=\frac{4}{4}=1.$$

Цим самим нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. У канонічній системі координат рівняння (4) є параметричними рівняннями гіперболи.

Якщо точка $M(x; y)$ лежить на правій вітці гіперболи, тобто $x\geq a$, то

$$\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{t^2+1}{t}\right)>0\Leftrightarrow t>0.$$

Навпаки, якщо $t>0$, то

$$x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{a}{2}\cdot 2=a,$$

оскільки $t+\frac{1}{t}\geq 2$.

Отже, для додатних значень t маємо праву вітку гіперболи.

Якщо t змінюється на проміжку $(0,1]$, значення x спадає від $+\infty$ до a, а значення y зростає від $-\infty$ до 0.

Якщо t змінюється на проміжку $[1,\infty)$, x зростає від a до $+\infty$, а y зростає від 0 до $+\infty$. Значенню $t=1$ відповідає вершина $(a;0)$ гіперболи (рис. 1).

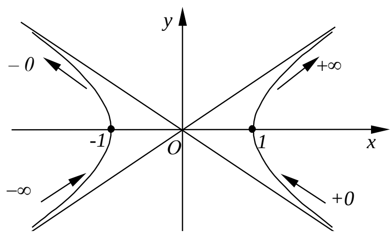

Рис. 1

Від'ємним значенням параметра t відповідає ліва вітка гіперболи. Якщо t змінюється на проміжку $(-\infty,-1]$, значення x зростає від $-\infty$ до $-a$, а значення y зростає від $-\infty$ до 0. Якщо t змінюється на проміжку $[-1,0)$, то значення x спадає від $-a$ до $-\infty$, а значення y зростає від 0 до $+\infty$.

§11. Спряжені гіперболи. Рівностороння гіпербола

11.1. ***Задача 1***. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат задано рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (1)$$

Дослідження лінії (1) можна було б провести у повній аналогії до тільки що проведеного дослідження лінії

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdot$$

Проте у повторенні такого дослідження немає ніякої потреби. Достатньо перейти до нової координатної системи $\{O;\vec{i}';\vec{j}'\}$, в якій нові базисні вектори $\vec{i}',\vec{j}'$ отримуються зі старих базисних векторів $\vec{i},\vec{j}$ наступним чином

$$\vec{i}'=\vec{j}\,,\ \vec{j}'=\vec{i}\ \cdot \qquad (2)$$

Якщо точка M у старій системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ має координати x, y, то у новій системі координат $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ вона буде мати координати y, x. Це впливає з рівності

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{j}' + y\vec{i}' \Leftrightarrow M(y; x)_{O,\vec{i}',\vec{j}'} .$$

Отже, формулами (2) здійснюється перетворення координат

$$x' = y,\ \ y' = x\,, \tag{3}$$

де $(x; y)$ – старі координати точки M, а $(x'; y')$ – її нові координати.

Замінимо у рівнянні (1) старі координати x і y новими координатами x' і y' згідно з формулами (3). В результаті отримуємо, що нові координати точок лінії, яка досліджується, задовольняють рівнянню

$$\frac{(x')^2}{b^2} - \frac{(y')^2}{a^2} = 1. \tag{4}$$

Тепер згідно з результатами §6 – §9 можна стверджувати, що лінія, яку задано рівнянням (1) у координатній системі $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$, є гіперболою з центром у початку координат O. Координатні осі Ox і Oy є осями симетрії цієї гіперболи. Дійсною віссю гіперболи є вісь Oy, оскільки для кривої (4) дійсною віссю є вісь Ox'; b – дійсна піввісь, a – уявна піввісь (рис. 1).

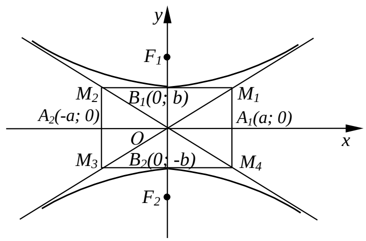

Рис. 1

Фокуси $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$ лежать на осі Oy, причому $c^2 = a^2 + b^2$. Діагоналі прямокутника $M_1M_2M_3M_4$ є асимптотами гіперболи (1). Всі точки гіперболи знаходяться всередині тієї пари кутів, які містять дійсну вісь Oy.

Ексцентриситет гіперболи (1) $e = \dfrac{c}{b}$, а директриси визначаються рівняннями $y = \dfrac{b}{e}$ і $y = -\dfrac{b}{e}$.

<u>**Означення 1**</u>. Дві гіперболи, які задано рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в одній і тій же декартовій прямокутній системі координат з одними і тими ж значеннями півосей a і b, називаються спряженими.

Використовуючи результати задачі 1, зобразимо спряжені гіперболи на одному рисунку (рис. 2).

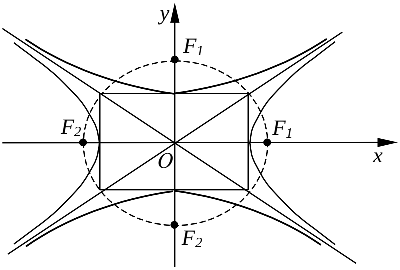

Рис. 2

Відмітимо, що спряжені гіперболи мають одні і ті ж асимптоти і одні і ті ж значення c. Фокуси обох гіпербол лежать на колі, описаному навколо прямокутника (рис. 2).

Оскільки гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ має параметричні рівняння

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \end{cases}$$

то параметричними рівняннями спряженої до неї гіперболи $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ будуть рівняння

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{b}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right). \end{cases}$$

11.2. **<u>Означення 2</u>**. Гіпербола, у якої дійсна піввісь дорівнює уявній півосі, називається рівносторонньою.

Оскільки $a=b$, то канонічне рівняння рівносторонньої гіперболи набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2. \qquad (5)$$

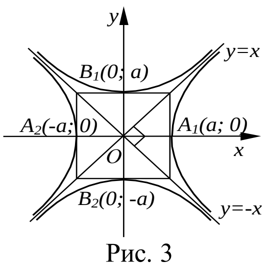

Рис. 3

Асимптоти рівносторонньої гіперболи (5) співпадають з бісектрисами координатних кутів $y=x$ і $y=-x$, а тому є перпендикулярними (рис. 3). Спряженою гіперболою до рівнстронньої гіперболи (5) є рівностороння гіпербола (рис. 3)

$$-x^2+y^2=a^2. \qquad (6)$$

Спряжені гіперболи (5) і (6) конгруентні.

У математиці та її застосуваннях часто зустрічається рівняння вигляду $xy = k$ або $y = \frac{k}{x}$ ($k = \text{const} \neq 0$). Це рівняння називається рівнянням оберненої пропорційності величини x і y. У зв'язку з цим розглянемо таку задачу.

Задача 2. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задано рівнянням

$$xy = k. \tag{7}$$

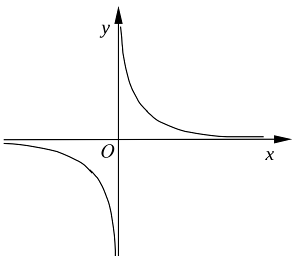

Рис. 4

Знаходячи різні розв'язки рівняння (7) і будуючи відповідні точки, можна впевнетись у тому, що лінія (7) при додатному k має схематичний вигляд, зображений на рис. 4. Всі точки цієї лінії розміщені у першому і третьому квадрантах; вся лінія симетрична відносно початку координат. Координатні осі не перетинають лінію ні в дійсних, ні в уявних точках. При необмеженому віддалені точки, що лежить на лінії (7), від початку координат, вона необмежено наближається до однієї з координатних осей. Наприклад, при необмеженому зростанні координати x координата $y = \frac{k}{x}$ необмежено спадає.

На основі викладеного природно припустити, що лінія (7) є гіперболою, центр якої знаходиться у початку координат і для якої координатні осі є асимптотами. Це припущення потрібно або довести, або спростити.

Для доведення припущення, що лінія (7) є гіперболою, потрібно показати, що точки, які лежать на цій лінії, мають геометричну властивість точок гіперболи (див. §6) або довести рівносильне цьому факту твердження, що існує така нова координатна система $\{O'; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ з осями $O'x'$ і $O'y'$, в якій координати точок лінії (7) задовольняють канонічному рівнянню гіперболи.

Доведемо, що така координатна система дійсно існує.

Нехай початок O' нової координатної системи співпадає з початком старої координатної системи $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$. Оскільки добуток xy старих координат ми хочемо перетворити у різницю квадратів нових координат x' і y', то природно старі координати точки x і y виразити через її нові координати x' і y' за допомогою таких рівностей

$$x = x' - y', \; y = x' + y'. \tag{8}$$

Згідно з формулами перетворення координат (див. §5 гл. VI) новими базисними векторами будуть вектори

$$\vec{e}_1(1;1)_{O,\vec{i},\vec{j}}, \ \ \vec{e}_2(-1;1)_{O,\vec{i},\vec{j}}. \tag{9}$$

Легко перевірити, що вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ ортогональні. Дійсно, їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -1+1=0$. Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ паралельні бісектрисам координатних кутів старої системи координат.

Нормуємо вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$:

$$\vec{i}' = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}.$$

Оскільки $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = \sqrt{2}$, то

$$\vec{i}' = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{j}' = \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

За нову координатну систему з осями Ox' і Oy' виберемо декартову прямокутну систему з базисом $\{O;\vec{i}';\vec{j}'\}$ (рис. 5).

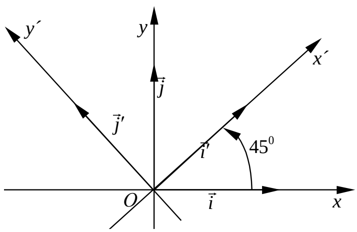

Рис. 5

Оскільки новими базисними векторами тепер є вектори (10), а не вектори (9), залежності старих координат точки x, y від її нових координат x', y' (тут збережені ті ж позначення нових координат, що і в (8) для базису $\{O;\vec{e}_1;\vec{e}_2\}$) набувають вигляду

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), \ \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'). \tag{11}$$

Підставимо вирази (11) для x і y в рівняння (7). В результаті отримуємо рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = k \Leftrightarrow (x')^2 - (y')^2 = 2k. \tag{12}$$

Рівняння (12) визначає рівносторонню гіперболу з півосями $a = b = \sqrt{2|k|}$. Асимптоти цієї гіперболи у новій координатній системі $Ox'y'$ мають рівняння

$$y' = x', \ \ y' = -x'. \tag{13}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (11) відносно x' і y':

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \tag{14}$$

Якщо тепер підставити (14) у (13), то будемо мати рівняння асимптот гіперболи (7) у старих координатах:

$$y' = x' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \Leftrightarrow x = 0,$$

$$y' = -x' \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \Leftrightarrow y = 0.$$

Отже, старі осі координат Ox і Oy є асимптотами гіперболи (7).

Якщо число k додатне, гіпербола (7) перетинає нову вісь абсцис а, якщо від'ємне – нову вісь ординат.

Отже, рівняння (7) визначає рівносторонню гіперболу з півосями $a = b = \sqrt{2|k|}$. Її асимптоти співпадають з координатними осями. Гіпербола розміщується у першому та третьому квадрантах, якщо $k > 0$ (рис. 6), і в другому та четвертому квадрантах, якщо $k < 0$ (рис. 7).

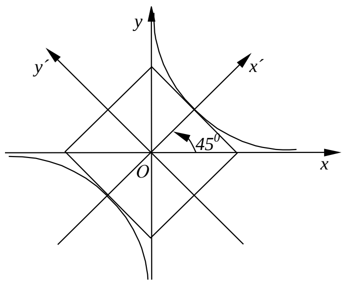

Рис. 6

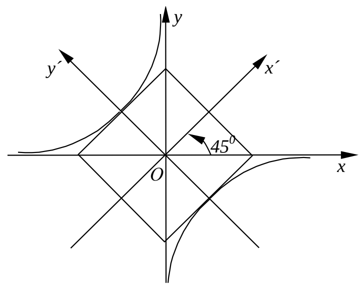

Рис. 7

Гіперболи, зображені на рис. 6, 7, спряжені.

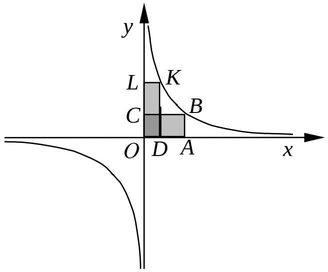

Рис. 8

Рівняння (7) показує, що для будь-якої точки рівносторонньої гіперболи добуток координат є величиною сталою. З іншого боку, цей добуток дорівнює площі прямокутника, сторони якого знаходяться на асимптотах, а одна вершина – на гіперболі. Отже, всі ці прямокутники мають одну і ту ж площу. Два таких прямокутники $OABC$ і $ODKL$ зображено на рис. 8. Відмічена властивість рівносторонньої гіперболи не пов'язана з системою координат, а є властивістю цієї гіперболи та її асимптот.

Задача 3. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ задано рівнянням

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{15}$$

де a, b, c, d – деякі дійсні числа.

<u>Означення 3</u>. Вираз (15) називається дробово-лінійною функцією.

Якщо $c = d = 0$, формула (15) не визначає ніякої лінії.

Якщо $c = 0,\ d \neq 0$, з (15) отримуємо лінійну функцію

$$y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

яка визначає пряму лінію на площині.

Нехай $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$. Тоді $a = \lambda c$, $b = \lambda d$ і формула (15) набуває вигляду

$$y = \frac{\lambda cx + \lambda d}{cx+d} = \lambda.$$

Отже, рівняння (15) при $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ або $ad = bc$ також визначає пряму. Тому будемо розглядати дробово-лінійну функцію при

$$c \neq 0 \quad \text{і} \quad ad \neq bc.$$

У цьому випадку

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow y = \frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)+b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}} \Leftrightarrow y - \frac{a}{c} = \frac{k}{x+\frac{d}{c}}, \tag{16}$$

де $k = \frac{bc-ad}{c^2}$.

Виконаємо перетворення координат за формулами

$$y' = y - \frac{a}{c}, \quad x' = x + \frac{d}{c}. \tag{17}$$

Це перетворення є паралельним перенесенням координатної системи $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ у точку $O_1\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

У новій координатній системі $\{O_1; \vec{i}; \vec{j}\}$ з новими координатними осями O_1x' і O_1y' рівняння (15) набуває вигляду

$$y' = \frac{k}{x'}. \tag{18}$$

Тому лінія (15) є тією ж гіперболою, що і лінія $y = \frac{k}{x}$, тільки центр її знаходиться у точці O_1 (рис. 9, 10).

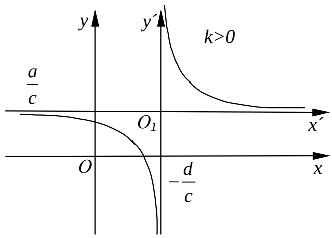

Рис. 9

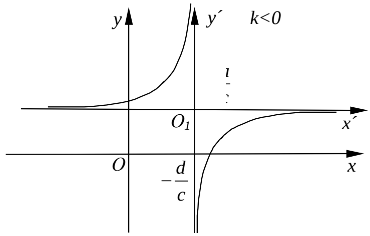

Рис. 10

Отже, графіком дробово-лінійної функції є рівностороння гіпербола з центром у точці O_1 і асимптотами $y = \frac{a}{c}$ і $x = -\frac{d}{c}$.

Точками перетину цієї гіперболи зі старими осями Ox і Oy є точки $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ і $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

Приклад 1. Дослідити лінію, яку в декартовій прямокутній системі координат задано рівнянням

$$y = \frac{x+2}{x+1}. \tag{19}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння (19) у вигляді

$$y = \frac{x+1+1}{x+1} \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{x+1}. \tag{20}$$

Нехай

$$x' = x+1, \; y' = y-1. \tag{21}$$

Перетворенню координат (21) відповідає паралельне перенесення старої координатної системи xOy у точку $O_1(-1; 1)$. Нові координатні осі O_1x' і O_1y' паралельні старим осям Ox і Oy.

У новій координатній системі $x'O_1y'$ рівняння (19) або рівносильне йому рівняння (20) набуває вигляду

$$y' = \frac{1}{x'}. \tag{22}$$

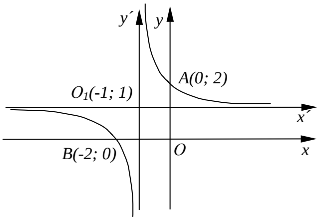

Рис. 11

Рівняння (22) визначає рівносторонню гіперболу (рис. 11).

Центром цієї гіперболи є точка $O_1(-1; 1)$, а асимптотами – прямі $x=-1$, $y=1$. Гіпербола перетинає старі осі координат у точках $A(0; 2)$ і $B(-2; 0)$.

§12. Канонічне рівняння параболи

<u>**Означення 1**</u>. Параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F цієї площини та фіксованої прямої l, що лежить у цій же площині і не проходить через точку F (рис. 1). Точка F називається фокусом параболи, пряма l – директрисою параболи, а відстань p від фокуса до директриси – фокальним параметром параболи. Відрізок, що з'єднує точку M параболи з її фокусом F, називається фокальним радіусом точки M.

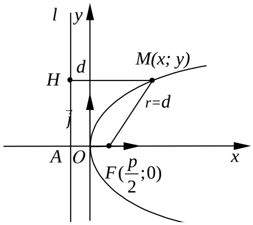

Рис. 1

Опустимо з фокуса F перпендикуляр на директрису l і точку перетину цього перпендикуляра з директрисою позначимо A. Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат наступним чином. За початок координат O візьмемо середину відрізка AF, за вісь Ox – пряму AO, причому напрям осі Ox виберемо так, щоб фокус F знаходився на додатному промені цієї осі (рис. 1). За вісь Oy візьмемо пряму, яка проходить через точку O паралельно директрисі l. Напрям цієї осі може бути довільним. У вибраній системі координат фокус F має координати $\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, а директриса l – рівняння

$$x=-\frac{p}{2}. \tag{1}$$

Нехай $M(x; y)$ – довільна точка площини. Позначимо через r відстань MF від точки M до фокуса параболи, а через d – відстань MH від точки M до директриси параболи. Тоді для довільної точки $M(x; y)$ параболи маємо

$$r=d \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \tag{2}$$

Навпаки, якщо координати деякої точки площини задовольняють рівнянню (2), то ця точка належить параболі. Отже, рівняння (2) у вибраній системі координат є рівнянням параболи.

Для спрощення рівняння параболи піднесемо обидві частини рівності (2) до квадрата і розкриємо дужки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px. \qquad (3)$$

Рівняння (3) є наслідком рівняння (2). Тому координати точки, яка належить параболі, задовольняють рівнянню (3).

Доведемо обернене твердження: якщо координати точки $M(x; y)$ задовольняють рівнянню (3), то ця точка належить параболі. Дійсно, нехай координати деякої точки $M(x; y)$ задовольняють рівнянню (3). Тоді

$$r = MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = MH = d ,$$

тобто точка M є точкою параболи. Звідси випливає, що рівняння (2) і (3) рівносильні, а тому рівняння (3) є рівнянням параболи.

Означення 2. Рівняння (3) називається канонічним рівнянням параболи, а вибрана система координат – канонічною.

§13. Дослідження форми параболи за допомогою канонічного рівняння

Нехай параболу задано її канонічним рівнянням

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Змінна y входить до рівняння (1) з квадратом. Тому, якщо параболі належить точка $M_1(x_1; y_1)$, то їй належить і точка $M_2(x_1; -y_1)$. Точки M_1 і M_2 симетричні відносно осі Ox. Отже, парабола є симетричною лінією відносно осі Ox. Вісь симетрії параболи називають просто віссю параболи.

Розв'яжемо рівняння (1) відносно y:

$$y = \pm\sqrt{2px}\,. \tag{2}$$

Областю визначення цієї функції є

$$0 \le x < \infty\,.$$

Це означає, що парабола (1) знаходиться справа від осі Oy, причому розміщується у першому та четвертому квадрантах.

Нехай x зростає, починаючи з нуля. Перед радикалом у (2) беремо знак плюс, оскільки внаслідок симетрії достатньо дослідити верхню частину параболи. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Зі збільшенням x збільшується і y. Тому вітка параболи при русі вправо весь час прямує вгору. Парабола – незамкнена крива, оскільки і x і y можуть зростати необмежено.

Дослідимо взаємне розміщення прямої $y = kx$ і параболи (1). Для цього розглянемо питання про існування розв'язків системи

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2x^2 - 2px = 0 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(k^2x - 2p\right) = 0 \\ y = kx. \end{cases} \tag{3}$$

Якщо $k = 0$, система має єдиний розв'язок $(x = 0,\ y = 0)$.

Геометрично це означає, що вісь Ox перетинає параболу в одній точці $O(0;\,0)$ (у вершині параболи).

<u>Означення 1</u>. Точка перетину параболи та її осі називається вершиною параболи.

Якщо $k \ne 0$, то система (3) має два розв'язки, яким відповідають точки $M_1(0;\,0)$ і $M_2\left(\dfrac{2p}{k^2};\ \dfrac{2p}{k}\right)$. Звідси випливає, що будь-яка пряма, яка проходить через початок координат і не співпадає з осями координат, перетинається з параболою у двох точках.

Проведене дослідження дозволяє схематично зобразити форму параболи (1) (рис. 1).

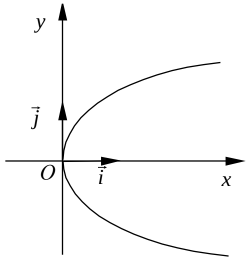

Рис. 1

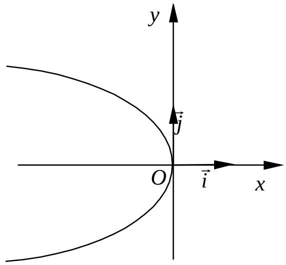

Рис. 2

Рівняння

$$y^2 = -2px, \tag{4}$$

де $p > 0$, зводиться до рівняння (1) заміною x на $-x$, тобто перетворенням координат, що полягає у зміні додатного напрямку осі Ox на протилежний (рис. 2).

Крива, що визначається рівнянням

$$x^2 = 2py, \tag{5}$$

також є параболою з вершиною у початку координат. Віссю симетрії цієї параболи є вісь Oy. Дійсно, перейдемо до нової координатної системи $\{O; \vec{i}'; \vec{j}'\}$, в якій

$$\vec{i}' = \vec{j}, \quad \vec{j}' = \vec{i}.$$

Тоді нові координати x' і y' будуть задовольняти рівнянню

$$(y')^2 = 2px'.$$

Звідси випливає, що лінія (5) є параболою з віссю Oy, оскільки вісь Ox' співпадає з віссю Oy (рис. 3).

Аналогічно, рівняння

$$x^2 = -2py \tag{6}$$

визначає параболу з вершиною у точці O і віссю Oy, але розміщеною вздовж від'ємного напрямку осі Oy (рис. 4).

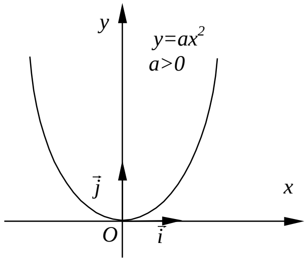

Рис. 3

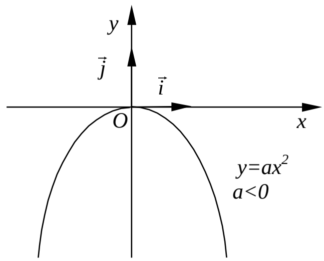

Рис. 4

Рівняння (5) і (6) зазвичай подають у вигляді

$$y = ax^2, \tag{7}$$

де $a \neq 0$, $|a| = \dfrac{1}{2p}$. Тоді $p = \dfrac{1}{2|a|}$.

Приклад 1. Написати рівняння парабол з вершинами у початку координат, якщо відомо, що

1) парабола є симетричною відносно осі Oy і проходить через точку $M(4; -8)$;

2) фокус параболи знаходиться у точці $F(0; -3)$.

Розв'язання. 1) Рівняння параболи згідно з (7) має вигляд $y = ax^2$. Оскільки парабола проходить через точку M, то

$$-8 = a \cdot 16 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Тоді $y = -\dfrac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -2y = x^2$.

2) Знаходимо параметр параболи p. Оскільки $p > 0$, то $\dfrac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$. Скориставшись формулою (6), отримуємо

$$x^2 = -12y.$$

§14. Рівняння дотичної до параболи. Оптична властивість параболи

Знайдемо рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

у точці $M_0(x_0; y_0)$. Для цього продиференціюємо рівняння (1) за умови, що y є функцією від x:

$$2yy' = 2p \Leftrightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Отже,

$$y'(x_0)=\frac{p}{y_0}. \qquad (2)$$

Рівняння дотичної у точці $M_0(x_0;\,y_0)$ має вигляд

$$y-y_0=k(x-x_0), \qquad (3)$$

де $k=y'(x_0)$. Якщо підставити (2) в (3) і врахувати, що точка $M_0(x_0;\,y_0)$ лежить на параболі, то отримаємо шукане рівняння дотичної до параболи (1) у точці $M_0(x_0;\,y_0)$:

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)\Leftrightarrow yy_0-y_0{}^2=px-px_0\Leftrightarrow yy_0-2px_0=px-px_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow yy_0=p(x+x_0). \qquad (4)$$

Тепер знайдемо рівняння дотичної до параболи у точці $M_0(x_0;\,y_0)$, якщо цю параболу задано рівнянням

$$y=ax^2,\ a\neq 0. \qquad (5)$$

Кутовий коефіцієнт дотичної у точці $M_0(x_0;\,y_0)$ дорівнює

$$k=2ax_0, \qquad (6)$$

оскільки $y'=2ax$. Підставивши (6) в (3) і врахувавши, що точка $M_0(x_0;\,y_0)$ є точкою параболи, отримуємо шукане рівняння дотичної:

$$y-y_0=2ax_0(x-x_0)\Leftrightarrow y-ax_0{}^2=2ax_0x-2ax_0{}^2\Leftrightarrow y+ax_0{}^2=2ax_0x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y+y_0=2ax_0x. \qquad (7)$$

Теорема 1. Дотична до параболи є бісектрисою кута FM_0D між фокальним радіусом M_0F точки дотику і перпендикуляром, опущеним із точки дотику на директрису.

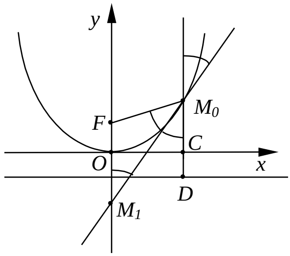

Рис. 1

Доведення. Проведемо дотичну (7) до параболи (5) у точці $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 1). Нехай ця дотична перетинає вісь Oy у точці M_1. Щоб знайти координати цієї точки, покладемо в рівнянні (7) $x=0$. Тоді $y=-y_0$ (рис. 1). За означенням параболи

$$M_0F = M_0D\,; \quad M_0D = M_0C + CD\,.$$

Але

$$y_0 = M_0C = \left|-y_0\right| = OM_1\,, \quad CD = OF\,.$$

Тоді $M_0D = OM_1 + OF = FM_1$. Трикутник M_1FM_0 рівнобедрений, оскільки $FM_1 = FM_0$. Тому $\angle FM_1M_0 = \angle FM_0M_1$, але $\angle FM_1M_0 = \angle M_1M_0D$. Отже, $\angle FM_0M_1 = \angle M_1M_0D$.

Теорему доведено.

Теорема 1 відображає важливу оптичну властивість параболічного дзеркала. Нехай у фокусі F розміщено джерело світла. Промені світла від джерела F, падаючи на параболу, відбиваються від неї за законом: кут падіння дорівнює куту відбиття. Згідно з тільки що доведеною рівністю кутів це означає, що відбитий промінь паралельний до осі параболи. Іншими словами, всі відбиті від параболи промені поширюються паралельним пучком (рис. 2). Ця оптична властивість параболи є визначальною при будові прожекторів, автомобільних фар тощо.

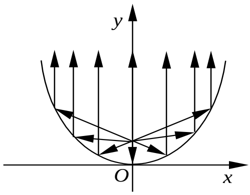

Рис. 2

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до параболи

$$y^2 = 8x , \tag{8}$$

що паралельна прямій

$$2x + 2y + 3 = 0 . \tag{9}$$

Розв'язання. За формулою (4) рівнянням дотичної до параболи (8) у точці $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ є рівняння

$$yy_0 = 4\left(x + x_0\right) . \tag{10}$$

Знайдемо кутові коефіцієнти прямих (9) і (10), які позначимо відповідно через k_1 і k_2:

$$k_1 = -1 ,\ k_2 = \frac{4}{y_0} .$$

З умови паралельності прямих (9) і (10) випливає рівність їх кутових коефіцієнтів:

$$-1 = \frac{4}{y_0} \Leftrightarrow y_0 = -4 .$$

Підставляючи $y_0 = -4$ в рівняння параболи (8), знаходимо абсцису x_0 точки дотику $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$:

$$16 = 8x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2 .$$

Рівняння шуканої дотичної приймає вигляд

$$y\left(-4\right) = 4\left(x + 2\right) \Leftrightarrow x + y + 2 = 0 .$$

Приклад 2. Із фокуса параболи $y^2 = 12x$ під гострим кутом α до осі Ox направлено промінь світла, причому $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$. Написати рівняння прямої, на якій буде знаходитись промінь, відбитий від параболи.

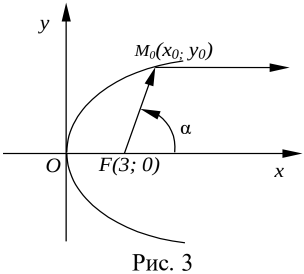

Рис. 3

Розв'язання. Фокус параболи має координати $F\left(3;\,0\right)$. Нехай точка $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$ параболи є такою, що кутовий коефіцієнт вектора $\overrightarrow{FM_0}$ дорівнює $\dfrac{3}{4}$ (рис. 3). Нагадаємо, що кутовий коефіцієнт вектора – це відношення його другої координати до першої.

Тоді

$$\frac{3}{4} = \frac{y_0}{x_0 - 3} \Leftrightarrow y_0 = \frac{3}{4}\left(x_0 - 3\right) . \tag{11}$$

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} > 0$, то $x_0 - 3 > 0$ і $y_0 > 0$. Знайдемо координати точки $M_0(x_0;\, y_0)$, підставивши (11) в рівняння параболи $y^2 = 12x$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 (x_0 - 3)^2 = 12x_0 \Leftrightarrow 3\left(x_0{}^2 - 6x_0 + 9\right) = 64x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_0{}^2 - 82x_0 + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 27 \\ x_0 = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Значення $x_0 = \frac{1}{3}$ не задовольняє умові задачі, оскільки $x_0 > 3$. Тому точка $M_0(x_0;\, y_0)$ має координати $(27;\, 18)$. Згідно з доведеною вище теоремою відбитий промінь лежить на прямій, яка паралельна осі Ox. Тому шуканою прямою є пряма $y = 18$.

§15. Парабола як графік квадратного тричлена

Теорема 1. Лінія, яка у деякій декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

є параболою з віссю, паралельною осі Oy.

Доведення. Піддамо квадратний тричлен, що стоїть у правій частині рівняння (1), алгебраїчному перетворенню, яке називається виділенням повного квадрата:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Звідси

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{2}$$

Виберемо нову координатну систему $\{O_1;\, \vec{i}';\, \vec{j}'\}$ так, щоб нові координати x' і y' будь-якої точки виражалися через старі координати x і y цієї ж точки за формулами

$$x' = x + \frac{b}{2a}, \quad y' = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3}$$

Тоді у новій системі координат рівняння (2) матиме вигляд

$$y' = a\left(x'\right)^2. \tag{4}$$

Рівнянню (4) повинні задовольняти нові координати всіх точок, які лежать на лінії (1), а тому ця лінія є параболою.

Для побудови даної параболи потрібно спершу побудувати нову координатну систему. Для цього виразимо старі координати через нові:

$$x = -\frac{b}{2a} + x', \; y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + y'. \tag{5}$$

З (5) випливає, що

$$\begin{cases} O_1\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}, \\ \vec{i}' = \vec{i}, \; \vec{j}' = \vec{j}. \end{cases} \tag{6}$$

Отже, перетворення (5) є паралельним перенесенням старої системи координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ у точку O_1.

Виконавши побудову точок параболи, заданої у новій координатній системі рівнянням (4), ми цим самим отримаємо і точки, що лежать на лінії (1). Парабола (1) проходить через точку $O_1\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, оскільки ця точка є початком нової координатної системи. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Ox, дотикається до параболи (1), оскільки ця пряма є віссю O_1x' нової координатної системи. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Oy, є віссю симетрії параболи (1). Параболу (1) зображено на рис. 1.

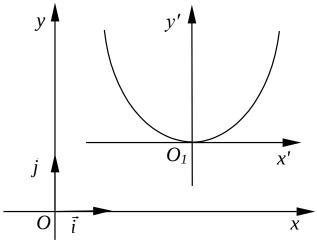

Рис. 1

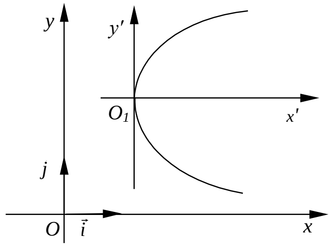

Рис. 2

Аналогічно теоремі 1 доводиться наступна теорема.

Теорема 2. Лінія, яку задано рівнянням

$$x = ay^2 + by + c\,,\ \ a \neq 0\,, \tag{7}$$

є параболою з віссю, паралельною осі Ox.

Доведення. Виділимо повний квадрат у правій частині рівняння (7):

$$x = a\left(y^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{8}$$

Нову координатну систему вводимо за допомогою формул

$$x' = x + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,, \quad y' = y + \frac{b}{2a}$$

або

$$x = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + x'\,,\ \ y = -\frac{b}{2a} + y'\,. \tag{9}$$

Формули (9) визначають паралельне перенесення старої координатної системи $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ у точку

$$O_1\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}; -\frac{b}{2a}\right); \quad \vec{i}' = \vec{i}\,,\ \ \vec{j}' = \vec{j}\,. \tag{10}$$

У новій координатній системі $\{O_1; \vec{i}'; \vec{j}'\}$ рівняння (7) визначає параболу

$$x' = a\left(y'\right)^2. \tag{11}$$

(див. рис. 2). Ця парабола проходить через точку $O_1\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)_{O,\bar{i},\bar{j}}$. Пряма, яка проходить через точку O_1 паралельно осі Oy, дотикається до параболи (7), а пряма, яка проходить через O_1 паралельно осі Ox, є віссю симетрії параболи.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Після того, як встановлено, що рівняння (1) є рівнянням параболи з віссю, паралельною осі Oy, вершину цієї параболи можна знайти іншими різними способами. Вкажемо на два з них.

Перший спосіб. Із симетрії параболи відносно її осі випливає, що абсциса вершини є середнім арифметичним коренів x_1 і x_2 тричлена (1):

$$\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Оскільки сума коренів квадратного тричлена (1) дорівнює $-\frac{b}{a}$, то для абсциси точки O_1 отримуємо $-\frac{b}{2a}$ (див. (6)). Підставивши знайдену абсцису в рівняння параболи (1), будемо мати ординату точки O_1. Ці міркування неприйнятні у випадку, коли корені тричлена (1) – комплексні.

Другий спосіб. У вершині дотична до параболи (1) паралельна осі Ox. Тому похідна $\frac{dy}{dx}$ дорівнює нулю:

$$\frac{dy}{dx}=2ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$

Вкажемо на вплив параметрів a, b, c на графік квадратного тричлена (1).

1°. Якщо $a>0$, то парабола опукла вниз (розбігається вгору); якщо $a<0$, то парабола опукла вгору (розбігається вниз).

2°. Чим менше $|a|$, тим ширшою є парабола.

3°. Якщо $b=0$, то вершина параболи знаходиться на осі Oy, яка є віссю параболи. При $b\neq 0$ вісь параболи зсувається вліво або вправо.

4°. Якщо $c=0$, парабола проходить через початок координат.

Приклад 1. Для параболи $y=-2x^2+4x-3$ визначити координати вершини, вісь параболи, напрям опуклості, точки перетину з осями координат.

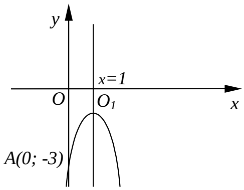

Рис. 3

Розв'язання. Згідно з (6) знаходимо координати вершини параболи: $O_1(1; -1)$. Оскільки $a < 0$, то парабола опукла вгору (розбігається вниз). Віссю параболи є пряма $x = 1$. Оскільки $D = b^2 - 4ac < 0$, то парабола не перетинає осі Ox. З віссю Oy парабола перетинається у точці $A(0; -3)$. Графік параболи зображено на рис. 3.