Пряма на площині

§1. Рівняння лінії

<u>Означення 1</u>. Геометричним місцем точок на площині називають множину всіх точок цієї площини, які мають деяку спільну властивість.

Ця властивість повинна бути такою, щоб про кожну точку площини можна було однозначно сказати, має вона дану властивість чи не має. Наприклад, всі точки кола знаходяться на одній і тій же відстані від центра кола, тоді як кожна точка, що не лежить на колі, не має цієї властивості, тобто не знаходиться на даній відстані від центра. Іншими словами, коло є геометричним місцем точок, що знаходяться на однаковій відстані від деякої точки, яка називається центром кола.

Аналітичне дослідження геометричного місця точок проводиться за такою схемою:

1. Передусім, вибирається деяка координатна система. В принципі, ця система може бути довільною. Проте, досить часто саме властивість, що визначає дане геометричне місце точок, вказує на вибір такої координатної системи, з використанням якої подальше аналітичне дослідження набуває найпростішого вигляду. Довільну точку M, що належить до даного геометричного місця точок, назвемо змінною точкою цього геометричного місця точок. Координати змінної точки M у вибраній системі координат позначимо $x,\ y$ і назвемо змінними координатами.
2. Геометричні співвідношення між точками даного геометричного місця точок за допомогою відомих формул аналітичної геометрії подаються у вигляді співвідношень між координатами цих точок, тобто у деякому формульному вигляді. Зокрема, це може бути деяке рівняння з двома невідомими x і y, якому задовольняють координати точок даного геометричного місця. У самому загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді
$$F\left(x,y\right)=0, \tag{1}$$
де $F\left(x,y\right)$ – символ функції двох змінних, тобто символ деякої операції, що проводиться над змінними x і y.
3. Якщо для деякого геометричного місця точок складено рівняння вигляду (1), то це рівняння повністю визначає це геометричне місце точок. Дійсно, стосовно кожної точки M_1 з координатами x_1, y_1 без будь-яких ускладнень чисто аналітично можна вияснити, належить ця точка до даного геометричного місця точок чи не належить. Якщо числа $x_1,\ y_1$ задовольняють рівнянню (1), тобто має місце тотожність

$$F(x_1, y_1) = 0,$$

то точка M_1 належить геометричному місцю. Якщо ж

$$F(x_1, y_1) \neq 0,$$

то точка M_1 не належить геометричному місцю точок, яке визначається рівнянням (1).

У зв'язку з цим введемо наступні означення.

Означення 2. Нехай задано рівняння (1) $F(x, y) = 0$. Множину всіх точок M координатної площини, координати x і y яких задовольняють даному рівнянню, називають лінією, що визначається цим рівнянням.

Означення 3. Нехай на координатній площині задано деяку лінію l. Рівнянням, що відповідає даній лінії або просто рівнянням лінії l називають таке рівняння (1) $F(x, y) = 0$, якому задовольняють координати x і y всіх точок цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

З означень 2 і 3 випливає, що для того щоб показати, що рівняння (1) є рівнянням даної лінії, потрібно довести два твердження:

1. Якщо деяка точка M площини лежить на даній лінії, то її координати x, y задовольняють рівнянню (1).
2. Якщо координати x, y якої-небудь точки M площини задовольняють рівнянню (1), то ця точка лежить на даній лінії.

Іншими словами, якщо задано рівняння (1) і ставиться задача відшукати лінію, що визначається цим рівнянням, то потрібно зібрати всі точки M, координати x, y яких задовольняють даному рівнянню. Навпаки, якщо задано лінію і потрібно написати (скласти) її рівняння, то слід підібрати таке рівняння з двома змінними, якому задовольняють координати всіх точок даної лінії і тільки цих точок.

Якщо рівняння деякої лінії відоме, то дослідження геометричних властивостей цієї лінії зводиться до вивчення властивостей її рівняння – у цьому полягає одна з основних ідей аналітичної геометрії. Цінність цієї ідеї в тому, що дослідження рівняння є значно простішим, а ніж безпосереднє геометричне дослідження лінії. Крім того, для дослідження рівняння існують добре розроблені методи алгебри і математичного аналізу.

Для прикладу, отримаємо рівняння кола як рівняння геометричного місця точок площини, рівновіддалених від даної точки цієї площини.

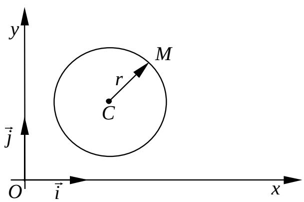

Рис. 1

Отже, нехай точка $C\left(a;b\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ є центром кола з радіусом r (рис 1). Для довільної точки $M\left(x;\,y\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ кола має місце рівність

$$|CM| = r. \tag{2}$$

З іншого боку, $|CM|$ є відстанню між двома точками C і M, тобто

$$|CM| = \sqrt{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2}.$$

Тому рівність (2) набуває вигляду

$$\sqrt{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad \left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = r^2. \tag{3}$$

Отже, координати довільної точки кола задовольняють рівнянню (3).

Легко бачити, що для точки M, яка не лежить на колі, виконується одна з двох умов: $|CM| > r$ або $|CM| < r$. Це свідчить про те, що рівнянню (3) задовольняють координати тільки точок кола, а тому рівняння (3) є рівнянням кола.

Означення 4. Лінія називається алгебраїчною, якщо її рівняння (1) є алгебраїчним.

Означення 5. Степінь рівняння алгебраїчної лінії називається порядком цієї лінії.

Оскільки степінь рівняння (3) дорівнює двом, то коло є лінією другого порядку.

Рівняння типу (1) можуть бути не алгебраїчними, наприклад, $\sin x + \cos x - 1 = 0$, $2^y - \ln x + 2 = 0$, $\dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2} = 0$ тощо.

Якщо лінія визначається не алгебраїчним рівнянням, то вона називається неалгебраїчною або трансцендентною.

§2. Загальне рівняння прямої

Означення 1. Рівнянням першого степеня або лінійним рівнянням відносно змінних x і y називається рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

де A, B, C – сталі, причому A і B одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Теорема 1. Довільну пряму на площині можна задати у декартовій прямокутній системі координат лінійним рівнянням (1). Навпаки, довільне лінійне рівняння (1) відносно декартових координат x, y є рівнянням деякої прямої на площині.

<u>*Доведення*</u>. Нехай на площині вибрано декартову прямокутну систему координат xOy і задано пряму лінію l. Пряма l однозначно визначається точкою $M_0\left(x_0; y_0\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, через яку вона проходить, і перпендикулярним до неї ненульовим вектором $\vec{N}\left(A; B\right)_{\vec{i},\vec{j}}$ (рис. 1). Оскільки далі розглядається

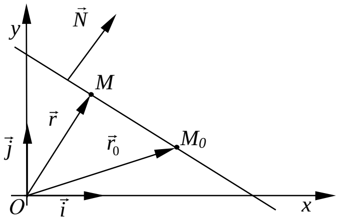

Рис. 1

виключно декартова прямокутна система координат $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$, замість $M\left(x; y\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$ будемо писати просто $M\left(x; y\right)$. Те ж саме стосується і позначення вектора: $\vec{N}\left(A; B\right)_{\vec{i},\vec{j}} = \vec{N}\left(A; B\right)$.

Виберемо на прямій l довільну точку M зі змінними координатами x, y. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0. \tag{2}$$

Але

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M, а $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки M_0. Тому рівняння (2) приймає вигляд

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \overrightarrow{N} = 0. \tag{3}$$

Якщо точка M не лежить на прямій l, то порушується перпендикулярність векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{N}$. Тому для точок, що не лежать на прямій l, рівність (3) не виконується. Це означає, що рівняння (3) є ***рівнянням прямої*** l ***у векторній формі***. Щоб записати це рівняння у координатній формі, потрібно скористатися виразом для скалярного добутку у координатній формі.

Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ має координати $x - x_0,\ y - y_0$, а вектор $\overrightarrow{N}$ – координати A, B. Тому рівняння (3) можна подати у вигляді

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

де $C = -\left(Ax_0 + By_0\right)$. Цим доведено, що координати x, y змінної точки M прямої l задовольняють лінійному рівнянню (4).

Покажемо тепер, що довільне лінійне рівняння (4), де $A^2+B^2\neq 0$, визначає пряму на площині. Для цього досить звести це рівняння шляхом тотожних перетворень до вигляду (3).

Нехай $\left(x_0;y_0\right)$ – пара чисел, які є розв'язком рівняння (4), тобто

$$Ax_0+By_0+C=0\,. \tag{5}$$

Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ належить до геометричного місця точок, яке визначається рівнянням (4). Віднімемо від рівняння (4) тотожність (5). Отримаємо рівняння, рівносильне рівнянню (4):

$$Ax+By+C-\left(Ax_0+By_0+C\right)=0 \iff A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0\,. \tag{6}$$

Якщо ввести позначення $\vec{r}\left(x;y\right)$, $\vec{r}_0\left(x_0;y_0\right)$, $\overrightarrow{N}\left(A;B\right)$ (за умовою $\overrightarrow{N}$ – ненульовий вектор), то у векторній формі рівняння (6) прийме вигляд (3)

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\cdot\overrightarrow{N}=0\,.$$

Згідно з доведеним вище це означає, що рівняння (6), а тому і рівносильне йому рівняння (4), визначає пряму l, яка проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0\right)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}\left(A;B\right)$.

Теорему доведено.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (4) називається загальним рівнянням прямої, а вектор $\overrightarrow{N}\left(A;B\right)$ – нормальним вектором прямої.

<u>Означення 3</u>. Напрямним вектором прямої називається довільний вектор $\vec{a}$, який паралельний до цієї прямої.

Теорема 2. Вектор $\vec{a}\left(-B;A\right)$ є одним з напрямних векторів прямої, заданої загальним рівнянням (4).

<u>Доведення</u>. Потрібно показати, що $\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}=0$. Дійсно $\vec{a}\cdot\overrightarrow{N}=-BA+AB=0$ і теорему доведено.

§3. Дослідження загального рівняння прямої

Дослідження загального рівняння прямої

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

– це дослідження того, як залежить розміщення прямої на площині від перетворення в нуль деяких з його коефіцієнтів.

Можливі такі випадки:

1°. $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$. Пряма (1) перетинає координатні осі у різних точках і називається прямою загального положення (рис. 1).

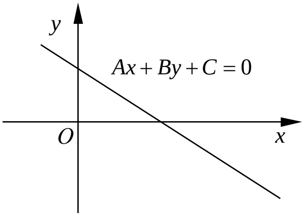

Рис. 1

2°. $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + By = 0 . \qquad (2)$$

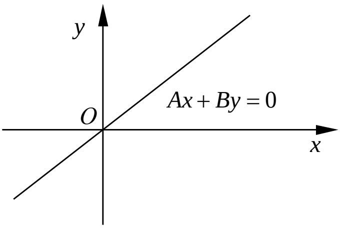

Рис. 2

Рівнянню (2) задовольняють координати початку координат $O(0;\ 0)$. Тому рівняння (2) визначає пряму, що проходить через початок координат (рис. 2).

3°. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$. Рівняння (1) приймає вигляд

$$Ax + C = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{C}{A} . \qquad (3)$$

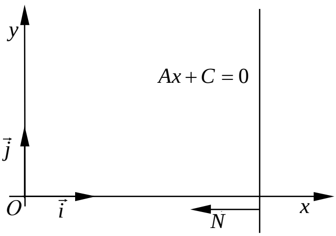

Рис. 3

Нормальний вектор $\vec{N}(A;0)$ прямої (3) паралельний базисному вектору $\vec{i}(1;0)$. Тому рівняння (3) визначає пряму, яка паралельна осі Oy (рис. 3). Якщо в умовах 3° і $C = 0$, то рівняння (3) приймає вигляд

$$Ax = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 . \qquad (4)$$

Пряма (4) паралельна базисному вектору $\vec{j}(0;1)$ і проходить через початок координат. Тому рівняння (4) є рівнянням координатної осі Oy . Про те, що рівняння (4) є рівнянням осі Oy , можна також зробити висновок, виходячи з того, що тільки для точок осі Oy абсциса x дорівнює нулю.

4. $A=0, B\neq 0, C\neq 0$. Рівняння (1) набуває вигляду

$$By+C=0 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{C}{B}\,. \qquad (5)$$

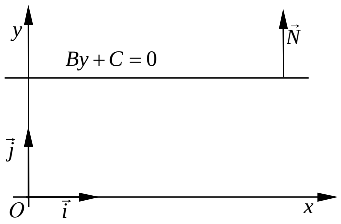

Рис. 4

Нормальний вектор прямої (5) $\vec{N}(0;B)$ паралельний базисному вектору $\vec{j}(0;1)$. Тому рівняння (5) визначає пряму, паралельну координатній осі Ox (рис. 4). Якщо в умовах 4° і $C=0$, то рівняння (5) приймає вигляд

$$y=0\,. \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням координатної осі Ox.

§4. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Нехай у декартовій прямокутній системі координат на площині задано загальні рівняння двох прямих

$$A_1x+B_1y+C_1=0\,, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0\,. \qquad (2)$$

Можливі такі випадки взаємного розміщення цих прямих:

1) вони можуть перетинатися;

2) можуть бути паралельними;

3) можуть співпадати.

Відмітимо, що дослідження взаємного розміщення двох прямих, заданих рівняннями (1) і (2) – це з точки зору алгебри дослідження розв’язку системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Перетину двох прямих з алгебраїчної точки зору відповідає випадок, коли система рівнянь (1), (2) має єдиний розв’язок; паралельності прямих - випадок, коли ця система не має розв’язків, тобто є несумісною; співпаданню прямих - випадок, коли система має нескінченну множину розв’язків.

Розглядаючи можливі випадки взаємного розміщення прямих, будемо використовувати як геометричні, так і алгебраїчні міркування.

Теорема 1. Для того щоб прямі (1) і (2) перетинались, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0\,. \qquad (3)$$

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Покажемо, що для прямих (1) і (2), які перетинаються, виконується умова (3).

Дійсно, нехай прямі (1) і (2) перетинаються. Тоді нормальні вектори $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2)$ відповідно прямих (1) і (2) не колінеарні. Умовою неколінеарності векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ є умова (3). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер виконується умова (3). Покажемо, що за цієї умови прямі (1) і (2) перетинаються. Дійсно, за умови (3) система двох лінійних рівнянь (1), (2) з двома невідомими x, y згідно з правилом Крамера має єдиний розв'язок $(x_0;y_0)$, який визначає спільну точку $M_0(x_0;y_0)$ прямих (1) і (2).

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб дві різні прямі (1) і (2) були паралельними, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \text{, проте або } \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{, або } \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (4)$$

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Покажемо, що для паралельних прямих (1) і (2) умови (4) виконуються. Дійсно, за умови паралельності прямих (1) і (2) нормальні вектори цих прямих $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1)$ і $\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2)$ колінеарні, тобто має місце рівність

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (5)$$

З (5) випливає, що

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1 , \qquad (6)$$

де λ – число, відмінне від нуля, оскільки у противному разі було б $A_2 = 0$ і $B_2 = 0$, що неможливо $\left(A_2^2 + B_2^2 \neq 0\right)$.

Підставимо (6) в (2):

$$\lambda A_1 x + \lambda B_1 x + C_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1 x + B_1 y + \frac{C_2}{\lambda} = 0. \qquad (7)$$

З (7) випливає, що

$$\frac{C_2}{\lambda} \neq C_1 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 \neq \lambda C_1 , \qquad (8)$$

оскільки у противному разі рівняння (1) і (2) зображали б одну і ту ж пряму, а це суперечить умові, що прямі (1) і (2) різні.

З умов (6) і (8) випливають умови (4).

Достатність. Покажемо тепер, що за умов (4) прямі (1), (2) є паралельними. Дійсно, з умов (4) випливає, що система лінійних рівнянь (1), (2) не має розв'язків. Геометрично це означає, що прямі (1) і (2) паралельні.

Теорему доведено.

Аналогічно теоремі (2) доводиться наступна теорема.

Теорема 3. Для того щоб прямі (1) і (2) співпадали, необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; A_2 = \lambda A_1,\, B_2 = \lambda B_1,\, C_2 = \lambda C_1,$$

тобто пропорційності коефіцієнтів одного рівняння відповідним коефіцієнтам другого рівняння.

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення двох прямих:

а) $\begin{matrix} x + y + 1 = 0, \\ -x + y + 2 = 0; \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} x + 2y + 3 = 0, \\ 2x + 4y - 7 = 0; \end{matrix}$ в) $\begin{matrix} 2x + 3y + 7 = 0, \\ 4x + 6y + 14 = 0. \end{matrix}$

Розв'язання. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0.$ Прямі перетинаються.

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$ але $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7 - 6 = -13 \neq 0$. Прямі паралельні.

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$ $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 28 - 28 = 0,$ $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 42 - 42 = 0.$ Прямі співпадають.

§5. Пучок прямих

5.1. **Означення 1**. Пучком прямих, що перетинаються, називають множину всіх прямих площини, які проходять через деяку M_0. Точку M_0 називають центром пучка.

Далі пучок прямих, що перетинаються, будемо називати просто пучком прямих.

Пучок прямих можна задати або координатами центра пучка $(x_0; y_0)$, або двома прямими, що перетинаються і належать пучку. Дійсно, ці прямі визначають центр пучка, тобто точку свого перетину.

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат задано пучок прямих ω з центром у точці $(x_0; y_0)$, то рівняння

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

де α і β – довільні числа, не рівні одночасно нулю $\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$, визначає даний пучок.

Доведення. Нехай α, β – довільні числа, такі що $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) – це лінійне рівняння, яке згідно з теоремами 1, 2 §2 визначає пряму, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(\alpha;\beta)$, тобто деяку пряму пучка ω.

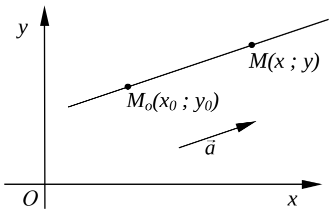

Рис. 1

Навпаки, нехай l – довільна пряма пучка ω, а вектор $\vec{a}(\alpha;\beta)$ – її напрямний вектор (рис. 1).

Точка $M(x; y)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ і вектор $\vec{a}$ колінеарні, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, рівняння будь-якої прямої l пучка ω можна записати у вигляді (1).

Теорему доведено.

У рівнянні (1) x_0 і y_0 – сталі, а α і β – параметри, тобто величини, які можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю.

Нехай задано дві прямі

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{3}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{4}$$

які перетинаються в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема 2. Якщо у декартовій прямокутній системі координат пучок прямих ω задано двома різними прямими (3) і (4), то рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{5}$$

де α і β – довільні числа, не рівні одночасно нулю $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, визначає даний пучок.

Доведення. Рівняння (5) рівносильне рівнянню

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) буде рівнянням деякої прямої, якщо коефіцієнти при x і y в цьому рівнянні не дорівнюють одночасно нулю.

Припустимо протилежне, тобто

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0 \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь (7) відносно невідомих α і β. Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки прямі (3) і (4) за умовою перетинаються. Тоді за формулами Крамера система (7) має єдиний розв'язок $\alpha = 0,\ \beta = 0$. Отримали протиріччя, оскільки за умовою $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Отже, для будь-яких значень α і β, що не дорівнюють одночасно нулю, рівняння (6) або рівносильне йому рівняння (5) визначає деяку пряму. Ця пряма проходить через точку перетину прямих (3) і (4). Дійсно, якщо x_0, y_0 – координати точки перетину прямих (3) і (4), то

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Тоді для довільних α і β

$$\alpha\left(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1\right) + \beta\left(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2\right) = 0.$$

Отже, ми довели, що для довільних α і β $\left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right)$ пряма (5) належить пучку прямих ω.

Навпаки, для будь-якої прямої l пучка ω можна так підібрати числа α і β, що рівняння (5) стане рівнянням прямої l.

Дійсно, пряма l визначається центром пучка – точкою $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і якою-небудь іншою точкою $M_1\left(x_1; y_1\right)$, через яку вона проходить. Підставимо координати точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ у рівняння (5):

$$\alpha\left(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1\right) + \beta\left(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2\right) = 0. \tag{8}$$

Числа $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$ і $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ одночасно не дорівнюють нулю, оскільки у противному разі точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і $M_1\left(x_1; y_1\right)$ будуть співпадати. Нехай, наприклад,

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \neq 0.$$

Тоді рівність (8) можна переписати у вигляді

$$\beta = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}\alpha. \tag{9}$$

Виберемо α довільним, а β – з рівності (9). При такому виборі α і β рівняння (5) визначає пряму, що проходить через точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ і $M_1\left(x_1; y_1\right)$, тобто є рівнянням прямої l.

Теорему доведено.

Приклад 1. Написати рівняння пучка прямих з центром у точці $M_0(3;-4)$.

Розв'язання. Шукане рівняння отримаємо, якщо підставимо координати точки $M_0(3;-4)$ в рівняння (1):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \iff \beta(x-3)-\alpha(y+4)=0.$$

Приклад 2. Написати рівняння пучка, що визначається прямими $2x+3y+4=0$ і $-3x+2y-5=0$.

Розв'язання. Задані прямі перетинаються, оскільки

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4+9=13\neq 0.$$

Шукане рівняння пучка отримаємо, скориставшись рівнянням (5):

$$\alpha(2x+3y+4)+\beta(-3x+2y-5)=0 \iff$$

$$\iff (2\alpha-3\beta)x+(3\alpha+2\beta)y+4\alpha-5\beta=0. \tag{10}$$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої з пучка (10), яка проходить через точку $M_1(1;1)$.

Розв'язання. Оскільки пряма проходить через точку $M_1(1;1)$, то

$$(2\alpha-3\beta)\cdot 1+(3\alpha+2\beta)\cdot 1+4\alpha-5\beta=0 \iff 9\alpha-6\beta=0 \iff \alpha=\frac{2}{3}\beta, \tag{11}$$

де $\beta\neq 0$ – довільне число.

Щоб отримати шукане рівняння, підставимо (11) в (10):

$$\left(\frac{4}{3}\beta-3\beta\right)x+\left(3\cdot\frac{2}{3}\beta+2\beta\right)y+\frac{8}{3}\beta-5\beta=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}\beta x+4\beta y-\frac{7}{3}\beta=0 \Leftrightarrow -5x+12y-7=0.$$

Отже, $-5x+12y-7=0$ – рівняння прямої пучка (10), яка проходить через точку $M_1(1;1)$.

5.2. Нехай задано три прямі своїми рівняннями у декартовій прямокутній системі координат:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3&=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Знайдемо умову перетину прямих (12) в одній точці, тобто умову належності цих прямих до одного пучка ω.

Теорема 3. Для того щоб три прямі, задані рівняннями (12), належали до одного пучка прямих ω, необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Покажемо, що для трьох прямих (12), які належать до одного пучка прямих ω, умова (13) виконується.

Дійсно, нехай прямі (13) належать до одного пучка ω з центром у точці $M_0\left(x_0; y_0\right)$. Тоді

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; C_1 = A_1\left(-x_0\right) + B_1\left(-y_0\right), \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; C_2 = A_2\left(-x_0\right) + B_2\left(-y_0\right), \\ A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; C_3 = A_3\left(-x_0\right) + B_3\left(-y_0\right). \end{aligned} \tag{14}$$

З рівностей (14) видно, що елементи третього стовпця визначника (13) є лінійною комбінацією елементів перших двох стовпців. Тому визначник Δ (13) дорівнює нулю. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай тепер визначник (13) $\Delta = 0$. Покажемо, що за цієї умови прямі (12) належать до одного пучка прямих ω. Для цього спочатку знайдемо за допомогою формул Крамера координати точки перетину перших двох прямих системи (12):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y_0 = -\dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

Доведемо, що точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ лежить на третій прямій (12), тобто

$$A_3x_0+B_3y_0+C_3=0\ . \tag{16}$$

Для цього розкладемо визначник (13) Δ за елементами третього рядка, в результаті чого рівність (13) приймає вигляд

$$A_3\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-B_3\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ A_3\frac{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}-B_3\frac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}+C_3=0\ \Leftrightarrow\ A_3x_0+B_3y_0+C_3=0.$$

Отже, отримали рівність (16). Теорему доведено.

Приклад 4. Довести, що прямі $x-y=0$, $x+y-2=0$, $3x-y-2=0$ перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Обчислюємо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot2-2\cdot2=0\ .$$

За теоремою 3 робимо висновок, що всі три прямі належать до одного пучка, тобто перетинаються в одній точці. Оскільки прямі $x-y=0$ і $x+y-2=0$ перетинаються в точці $M_0\left(1;1\right)$, то всі три прямі проходять через одну точку $M_0\left(1;1\right)$ (центр пучка).

§6. Спеціальні форми рівняння прямої

Довільну пряму на площині можна задати її загальним рівнянням

$$Ax+By+C=0\ . \tag{1}$$

Разом з тим, цю пряму можна задати і рівнянням

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0\ , \tag{2}$$

де λ – довільне число, відмінне від нуля. Тому взаємно-однозначної відповідності між множиною всіх рівнянь першого степеня і множиною всіх прямих на площині встановити не можна. Хоча кожному рівнянню першого степеня і відповідає єдина пряма на площині, обернене твердження є хибним: кожну пряму на площині можна задати нескінченною кількістю лінійних рівнянь вигляду (2).

Довільністю числа λ в рівнянні (2) можна скористатись для того, щоб зробити один з відмінних від нуля коефіцієнтів рівняння прямої рівним деякому наперед заданому числу. Зокрема, для спрощення рівняння прямої природно підібрати число λ так, щоб один з коефіцієнтів, що не дорівнює нулю, став рівним одиниці.

У зв'язку з цим можливі такі спеціальні форми рівняння прямої:

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0 \text{, якщо } C\neq 0,\ \ \lambda=\frac{1}{C}; \qquad (3)$$

$$\frac{A}{B}x+y+\frac{C}{B}=0 \text{, якщо } B\neq 0,\ \ \lambda=\frac{1}{B}. \qquad (4)$$

6.1. Розглянемо спочатку рівняння (3). До такого вигляду можна звести рівняння лише тих прямих, які не проходять через початок координат, оскільки $C\neq 0$. Загальне рівняння прямої (1) за цієї умови допускає такі тотожні перетворення (вважаємо також, що $A\neq 0$ і $B\neq 0$):

$$Ax+By+C=0 \Leftrightarrow Ax+By=-C \Leftrightarrow \frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \qquad (5)$$

де $p=-\dfrac{C}{A}$, $q=-\dfrac{C}{B}$, $A\neq 0$, $B\neq 0$.

<u>Означення 1</u>. Рівняння прямої у формі (5) називається рівнянням прямої у відрізках.

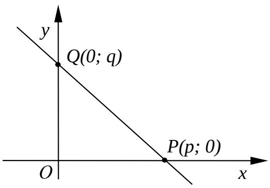

Рис. 1

Коефіцієнти $\dfrac{1}{p}$ і $\dfrac{1}{q}$ в рівнянні (5) мають простий геометричний смисл. Дійсно, позначимо через P і Q точки перетину прямої (5) з координатними осями Ox і Oy (рис. 1). Тоді ці точки мають координати $P(p;0)$, $Q(0;q)$.

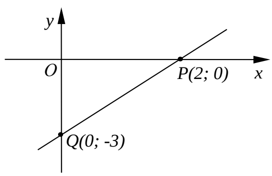

Рис. 2

Приклад 1. Записати рівняння прямої, що відтинає на осях координат відрізки, для яких $p=2$, $q=-3$.

Розв'язання. Підставимо в рівняння (5) значення $p=2$, $q=-3$. В результаті отримуємо рівняння прямої у відрізках $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1$ (рис. 2). Це рівняння можна перетворити до загального рівняння прямої: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y-6=0$.

6.2. Перейдемо до рівняння прямої у формі (4). До такої форми можна звести загальне рівняння (1) прямої, яка не паралельна осі Oy $\left(B \neq 0\right)$:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow By = -Ax - C \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Leftrightarrow y = kx + b, \qquad (6)$$

де $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

<u>Означення 2</u>. Число $k = -\dfrac{A}{B}$ називається кутовим коефіцієнтом прямої.

<u>Означення 3</u>. Рівняння прямої (6) називається рівнянням прямої в явній формі або рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

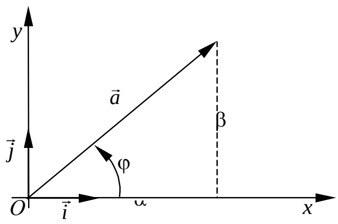

Рис. 3

<u>Зауваження 1</u>. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано вектор $\vec{a}\left(\alpha;\beta\right)$. Число $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$ називається кутовим коефіцієнтом вектора $\vec{a}$. З рис. 3 випливає геометричний смисл кутового коефіцієнта вектора:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\left(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}\right) = \operatorname{tg}\varphi .$$

Кутовий коефіцієнт вектора характеризує його напрямок і не залежить від довжини вектора.

Напрямним вектором прямої (1) є вектор $\vec{a}\left(-B; A\right)$. Тому згідно з означенням 2 кутовий коефіцієнт прямої дорівнює кутовому коефіцієнту напрямного вектора цієї прямої. Прямі, які паралельні осі Oy, не мають кутового коефіцієнта.

Вияснимо геометричний смисл коефіцієнта b у рівнянні (6). Для цього покладемо в (6) $x = 0$. В результаті отримуємо $y = b$. Отже, число b є ординатою точки перетину $Q\left(0; b\right)$ прямої (6) з віссю Oy (рис. 4).

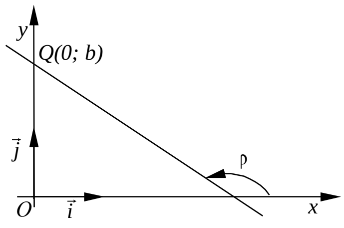

Рис. 4

Запишемо рівняння прямої, що має заданий кутовий коефіцієнт k і проходить через задану точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$.

Оскільки пряма (6) проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$, отримуємо тотожність

$$y_0 = kx_0 + b \iff b = y_0 - kx_0. \tag{7}$$

Підставивши (7) в (6), будемо мати шукане рівняння

$$y = kx_0 + y_0 - kx_0 \iff y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{8}$$

§7. Формула для знаходження відстані від точки до прямої. Нормальне рівняння прямої

7.1. Нехай пряму l задано загальним рівнянням

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

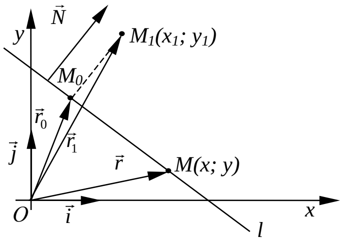

Рис. 1

Як і раніше, $\left(x; y\right)$ – координати змінної точки M прямої l (рис. 1), $\vec{N}\left(A; B\right)$ – нормальний вектор прямої l, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}\left(x; y\right)$ – радіус-вектор змінної точки $M\left(x; y\right)$. У векторній формі рівняння (1) набуває вигляду

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + C = 0, \tag{2}$$

оскільки скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{N}$ дорівнює $\vec{r} \cdot \vec{N} = Ax + By$.

Нехай задано точку $M_1\left(x_1; y_1\right)$ (рис. 1). Потрібно знайти відстань d від точки M_1 до прямої l. Позначимо ортогональну проекцію точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ на пряму l через $M_0\left(x_0; y_0\right)$, а радіуси-вектори точок M_1 і M_0 – через $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ і $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Тоді

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right|. \tag{3}$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ колінеарний вектору $\vec{N}$, тобто справедлива рівність

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \lambda\vec{N}. \tag{4}$$

Для знаходження невідомого множника λ обидві частини рівності (4) помножимо скалярно на вектор $\vec{N}$:

$$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{N} = \lambda\vec{N} \cdot \vec{N} \iff \vec{r}_1 \cdot \vec{N} - \vec{r}_0 \cdot \vec{N} = \lambda\left|\vec{N}\right|^2. \tag{5}$$

Скористаємось тепер тим, що точка M_0 лежить на прямій l і тому

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{N} + C = 0 \iff \vec{r}_0 \cdot \vec{N} = -C. \tag{6}$$

Якщо підставити (6) у (5), то будемо мати

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C = \lambda \left|\vec{N}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2}. \tag{6'}$$

З (3), (4), (6′) знаходимо шукану відстань d:

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\lambda\vec{N}\right| = \frac{\left|\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right)\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + C\right|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{7}$$

Формулу (7) можна записати у координатній формі:

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Отже, щоб знайти відстань від заданої точки $M\left(x_1; y_1\right)$ до заданої прямої (1), потрібно підставити координати цієї точки у ліву частину рівняння (1) і модуль отриманого таким чином числа поділити на довжину нормального вектора прямої (1).

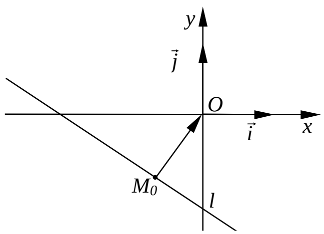

Рис. 2

Звернемо увагу на частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат (рис. 2). Нехай M_0 – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат O на пряму l. Врахувавши, що $\vec{r}_1 = \vec{0}$, $\vec{r}_0 = -\overrightarrow{M_0O}$, з (4), (6′) отримуємо

$$\overrightarrow{M_0O} = \lambda\vec{N} = \frac{\vec{0} \cdot \vec{N} + C}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} = \frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2}, \tag{9}$$

$$d_0 = \left|\overrightarrow{M_0O}\right| = \frac{\left|C\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} = \frac{\left|C\right|}{\left|\vec{N}\right|}. \tag{10}$$

Звичайно, формулу (10) для розглянутого частинного випадку можна отримати безпосередньо з формули (7).

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1(3;-4)$ до прямої l, заданої рівнянням $4x + 3y - 10 = 0$.

Розв'язання. Підставимо координати точки M_1 та коефіцієнти $A = 4$ і $B = 3$ у формулу (8):

$$d = \frac{\left|4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 10\right|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{\left|-10\right|}{5} = 2 \text{ (лін. од.)}.$$

7.2. Нехай пряма (2) не проходить через початок координат, тобто $C \neq 0$.

Означення 1. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до прямої і напрямлений від початку координат до прямої (рис. 3), назвемо одиничним вектором нормалі.

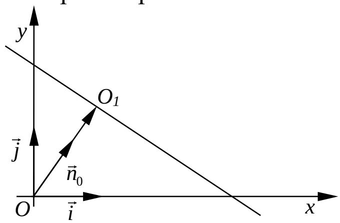

Рис. 3

Згідно з формулами (9) і (10) маємо

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|} = -\frac{C\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|^2} : \frac{|C|}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{C}{|C|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (11)$$

Отже,

$$\begin{cases} \vec{n}_0 = -\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C > 0 \\ \vec{n}_0 = \dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C < 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2) на довільний ненульовий множник λ. В результаті отримаємо рівносильне рівняння

$$\vec{r} \cdot \left(\lambda\vec{N}\right) + \lambda C = 0, \qquad (13)$$

яке визначає ту ж саму пряму l, що і рівняння (2).

Нормальним вектором у рівнянні (13) є вектор $\lambda\vec{N}$. Довжину цього вектора можна зробити якою завгодно шляхом відповідного підбору множника λ. Виберемо множник λ таким, щоб вектор $\lambda\vec{N}$ дорівнював одиничному вектору нормалі до прямої, тобто, щоб

$$\lambda\vec{N} = \vec{n}_0. \qquad (14)$$

Згідно з формулою (11) для цього потрібно взяти

$$\lambda = \lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|}, \qquad (15)$$

тобто

$$\begin{cases} \lambda_0 = -\dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C > 0 \\ \lambda_0 = \dfrac{1}{\left|\vec{N}\right|}, & \text{якщо} \quad C < 0. \end{cases} \qquad (15')$$

<u>Означення 2</u>. Множник λ_0, що визначається формулою (15) (або (15′)), називається нормувальним множником прямої l.

Підставимо в рівняння (13) замість λ його значення λ_0 з (15):

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0+\frac{C(-C)}{|C||\vec{N}|}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{C^2}{|C||\vec{N}|}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{|C|^2}{|C||\vec{N}|}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{r}\cdot\vec{n}_0-\frac{|C|}{|\vec{N}|}=0 .$$

Звідси, згідно з формулою (10),

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0-d_0=0 . \tag{16}$$

<u>Означення 3</u>. Рівняння прямої (16) називається нормальним рівнянням прямої.

До нормального вигляду можна звести рівняння будь-якої прямої, що не проходить через початок координат. Зручність використання нормального рівняння прямої (16) пояснюється геометричним змістом вектора $\vec{n}_0$ і числа d_0, які визначають це рівняння: $\vec{n}_0$ – одиничний вектор нормалі до прямої; d_0 – відстань від початку координат до прямої.

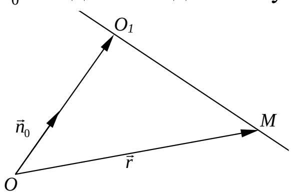

Рис. 4

Відмітимо, що рівняння (16) можна отримати дуже просто шляхом наступних геометричних міркувань: проекція вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 4), тобто радіуса-вектора $\vec{r}$ довільної точки прямої (2), на одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ дорівнює відстані d_0 від початку координат O до прямої. З іншого боку, ця проекція дорівнює скалярному добутку $\text{пр}_{\vec{n}_0}\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{n}_0$. Отже, $d_0=\vec{r}\cdot\vec{n}_0 \;\Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}_0-d_0=0$.

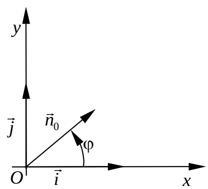

Рис. 5

Цінність наведеного вище аналітичного виведення рівняння (16) полягає у тому, що це виведення дало нам формулу (15) для нормувального множника і без будь-яких змін може бути перенесеним на випадок векторів тривимірного простору. Повернемося до формули (11) і перепишемо її з врахуванням того, що вектор $\vec{N}$ має координати $(A;B)$:

$$\vec{n}_0=-\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A\vec{i}+B\vec{j}\right). \tag{17}$$

З іншого боку, для вектора $\vec{n}_0$ можна записати (рис. 5)

$$\vec{n}_0 = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\,, \tag{18}$$

де $\varphi = \left(\widehat{\vec{i}\,,\vec{n}_0}\right)$ – кут між віссю Ox і вектором $\vec{n}_0$. Порівнюючи (17) і (18), отримуємо

$$\cos\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,\quad \sin\varphi = -\frac{C}{|C|}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{19}$$

Якщо тепер обидві частини загального рівняння (1)

$$Ax + By + C = 0$$

прямої помножити на нормувальний множник (15)

$$\lambda_0 = -\frac{C}{|C|}\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

і скористатись формулами (19), (10), то отримаємо рівняння

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - d_0 = 0\,. \tag{20}$$

<u>Означення 4</u>. Рівняння (20) називається нормальним рівнянням прямої у координатній формі.

Цінність рівняння (20) полягає у чіткій геометричній інтерпретації його коефіцієнтів.

Зауваження 1. Якщо пряма (2) проходить через початок координат, тобто $C = 0$, то одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0$ визначається з точністю до знака:

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\,.$$

Нормальне рівняння прямої у цьому випадку приймає вигляд

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0\,.$$

Зауваження 2. Якщо пряму l у декартовій прямокутній системі координат задано нормальним рівнянням (16) або (20), то відстань від точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямої l дорівнює модулю лівої частини рівняння прямої (16) або (20), куди замість змінного радіуса-вектора $\vec{r}$ або змінних координат $(x;y)$ потрібно підставити радіус-вектор $\vec{r}_1$ або координати $(x_1;y_1)$ точки M_1. Дійсно, за формулами (7) або (8) отримуємо відповідно

$$d = \frac{|\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0|}{|\vec{n}_0|} = |\vec{r}_1\cdot\vec{n}_0 - d_0|$$

або

$$d=\frac{\left|x_1\cos\varphi+y_1\sin\varphi-d_0\right|}{\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}}=\left|x_1\cos\varphi+y_1\sin\varphi-d_0\right|.$$

Приклад 2. Написати нормальне рівняння прямої, заданої у декартовій прямокутній системі координат рівнянням

$$3x+4y-5=0. \tag{21}$$

Розв'язання. За формулою (15) знаходимо нормувальний множник λ_0 прямої:

$$\lambda_0=-\frac{C}{|C|}\frac{1}{\left|\overrightarrow{N}\right|}=-\frac{(-5)}{5\sqrt{9+16}}=\frac{1}{5}.$$

Нормальне рівняння прямої отримуємо, помноживши рівняння (21) на нормувальний множник $\lambda_0=\frac{1}{5}$:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-1=0.$$

При цьому $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.

§8. Задачі на складання рівнянь прямих. Параметричні рівняння прямої

8.1. Розглянемо деякі задачі на складання рівняння прямої.

Задача 1. Записати рівняння прямої l, заданої у декартовій прямокутній системі координат ненульовим напрямним вектором $\vec{a}(\alpha;\beta)$ і точкою $M_0(x_0;y_0)$, через яку ця пряма проходить.

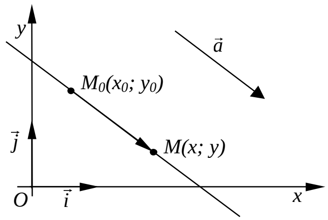

Рис. 1

Розв'язання. Нагадаємо, що напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l – це вектор, паралельний до прямої l (рис. 1). Довільна точка M лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{a}$. Якщо координати точки M позначити $(x;y)$, то $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$. Умова колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ запишеться так:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Якщо точка M не лежить на прямій l, то колінеарність векторів порушується і умова (1) не виконується. Отже, умові (1) задовольняють всі точки прямої l і тільки ці точки.

Розкриємо визначник (1). В результаті отримуємо лінійне рівняння

$$\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0, \tag{1'}$$

яке визначає пряму l.

Якщо жодна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю, то умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \tag{2}$$

У випадку $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ рівняння (1) і (2) рівносильні.

Задавати пряму співвідношеннями (2) можна і у випадку, коли один із знаменників α чи β в (2) дорівнює нулю, якщо вважати, що дорівнює нулю і відповідний чисельник. Наприклад, запис

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{\beta}$$

означає, що $x-x_0=0 \Leftrightarrow x=x_0$, тобто пряма проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(0;\beta)$ (паралельно осі Oy).

<u>**Означення 1**</u>. Рівняння (1) або (2) називається канонічним рівнянням прямої.

Задача 2. Записати рівняння прямої l, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої l можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$ і задача зведеться до задачі 1. Рівняння прямої l приймає вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3}$$

Задача 3. Записати рівняння прямої l, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно ненульовому вектору $\vec{N}(A;B)$.

Ця задача розв'язана нами при доведені теореми 1 §2. Рівняння прямої l має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{4}$$

Задача 4. Записати рівняння прямої l, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k.

Ця задача розв'язана в §6, де показано, що рівняння прямої l має вигляд

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (5)$$

8.2. Перейдемо до параметричних рівнянь прямої. Під такими рівняннями розуміють рівняння, в яких координати довільної точки прямої виражаються через довільний параметр t.

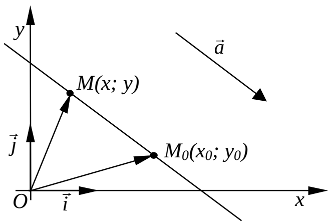

Рис. 2

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(\alpha;\beta)$ (рис. 2). Довільна точка $M(x;y)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні, тобто тоді і тільки тоді, коли ці вектори відрізняються числовим множником

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}. \qquad (6)$$

Векторну рівність (6) можна подати у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases} \qquad (7)$$

<u>Означення 2</u>. Рівняння (7) називаються параметричними рівняннями прямої.

Смисл цих рівнянь полягає в тому, що для довільного дійсного числа t точка з координатами x, y з (7) завжди лежить на прямій l і навпаки, для довільної точки прямої l завжди знайдеться таке дійсне число t, що координати x, y цієї точки виражаються через x_0, y_0, α, β співвідношеннями (7).

Якщо параметр t приймає всі дійсні значення, то точка M з координатами (7) пробігає всю пряму.

Введемо радіуси-вектори $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (рис. 2). Тоді рівність (6) можна подати у вигляді

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a} \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \qquad (8)$$

<u>Означення 3</u>. Рівняння (8) називається векторним параметричним рівнянням прямої, що проходить через точку $M(\vec{r}_0)$ і має напрямний вектор $\vec{a}$.

Приклад 1. Написати параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;1)$ і $M_2(3;5)$.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(2;4)$. Тоді параметричні рівняння прямої можна записати так:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases} \tag{9}$$

§9. Обчислення кута між двома прямими в орієнтованій площині. Умови перпендикулярності двох прямих

9.1. Передусім уточнимо поняття кута між двома прямими, що розглядаються у певному порядку, тобто із зазначенням того, яка пряма вважається першою, а яка – другою (такі прямі будемо називати впорядкованими).

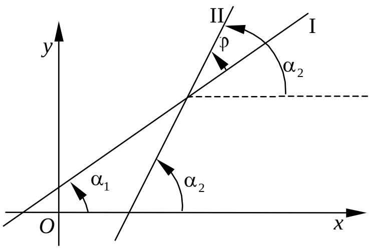

Рис. 1

<u>Означення 1</u>. Кутом між прямою I (перша пряма) і прямою II (друга пряма) називається кут φ, на який потрібно повернути пряму I навколо точки перетину обох прямих з тим, щоб вона співпала з прямою II (рис. 1). Якщо поворот здійснюється проти руху годинникової стрілки, то кут φ вважається додатним, а якщо за годинниковою стрілкою - від'ємним.

Отже, кут φ між двома впорядкованими прямими може вимірюватись або додатним, або від'ємним числом. Крім того, легко бачити, що цей кут визначається неоднозначно, оскільки поворот на 180° переводить пряму саму в себе. Так, якщо φ_0 – найменший по модулю кут між прямими I і II, то повернувши пряму I на кут $\varphi_0 + k \cdot 180^\circ$ (k – довільне ціле додатне або від'ємне число), ми знову сумістимо пряму I з прямую II. Якщо кут φ між прямими I і II потрібно визначити однозначно, то накладають обмеження, розглядаючи, наприклад, $0 \le \varphi < 2\pi$ або $-\pi < \varphi \le \pi$. Кут φ між прямими I і II, взятими у зазначеному порядку, можна знайти, якщо відомі вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, паралельні відповідно прямим I і II. Тоді

$$\varphi = \varphi_0 + 180^o \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де φ_0 – кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

Якщо прямі I і II задано загальними рівняннями відповідно

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то напрямними векторами цих прямих є вектори відповідно

$$\vec{a}_1\left(-B_1; A_1\right) \quad \text{і} \quad \vec{a}_2\left(-B_2; A_2\right).$$

Тоді

$$\cos\left(\vec{a}_1 \hat{,} \vec{a}_2\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{1}$$

і для кута φ між прямими I і II можна записати

$$\varphi = \left(\vec{a}_1 \hat{,} \vec{a}_2\right) + 180^\circ \cdot k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Знаходження кута φ зручно проводити у випадку, коли прямі I і II задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами.

Нехай жодна з прямих I і II не паралельна осі Oy, тобто $B_1 \neq 0$ і $B_2 \neq 0$. Тоді рівняння цих прямих можна подати у формі рівнянь з кутовими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} &y = k_1x + b_1, \quad k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad b_1 = -\frac{C_1}{B_1}; \\ &y = k_2x + b_2, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}, \quad b_2 = -\frac{C_2}{B_2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Повернемося до рис. 1. Позначимо через α_1 кут між віссю Ox і прямою I, а через α_2 – кут між віссю Ox і прямою II. Оскільки α_1 дорівнює куту повороту осі Ox до співпадання з прямою I, а кут φ – куту повороту прямої I до співпадання з прямою II, то

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Скориставшись відомою формулою тригонометрії, можна записати

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{3}$$

Якщо тепер врахувати, що $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ і $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, то для тангенса кута між прямими I і II будемо мати

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{4}$$

Ще раз відмітимо, що тут k_1 – кутовий коефіцієнт першої прямої, а k_2 – кутовий коефіцієнт другої прямої. Якщо визначається кут між прямою II і прямою I, то в чисельнику формули (4) потрібно брати $k_1 - k_2$, тобто права частина формули (4) змінює знак на протилежний. Тому кутом між прямими II і I буде кут $\pi - \varphi$. Якщо за умовою задачі вимагається розглядання того і іншого кута, то у правій частині формули (4) слід взяти подвійний знак.

У багатьох випадках потрібно визначити кут між двома прямими, які не індивідуалізуються, тобто не вказується, яка з цих прямих є першою, а яка другою. У таких випадках у чисельнику формули (4) можна брати кутові коефіцієнти в довільному порядку. Для одного порядку ми будемо мати гострий кут між прямими, а для другого – суміжний з ним тупий кут, оскільки тангенси суміжних кутів відрізняються лише знаком. Зручно користуватися формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \tag{5}$$

яка дає додатний тангенс, тобто завжди визначає гострий кут між прямими.

За допомогою формули (4) досить просто навести вже відоме нам геометричне тлумачення кутового коефіцієнта k прямої, заданої у декартовій (правій) прямокутній системі координат рівнянням $y = kx + b$. Дійсно, нехай φ – кут між координатною прямою $y = 0$ і прямою $y = kx + b$ (порядок слідування прямих є суттєвим). Приймаючи до уваги, що кутовий коефіцієнт прямої $y = 0$ дорівнює нулю, за формулою (4) отримуємо

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k - 0}{1 + k \cdot 0} = k.$$

Приклад 1. Знайти кут між прямими

$$4x + y - 1 = 0 \quad \text{і} \quad 5x - 3y - 7 = 0.$$

Розв'язання. За формулою (1) отримуємо

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{16+1}\sqrt{25+9}} = \frac{17}{\sqrt{17}\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, $\varphi = 45^\circ$.

Приклад 2. Знайти кут між прямими

$$3x - 5y + 7 = 0 \quad \text{і} \quad 2x - 3y + 4 = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо кутові коефіцієнти прямих: $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = \frac{2}{3}$.

За формулою (4) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \dfrac{1}{21}$. Скориставшись таблицями тригонометричних функцій, отримуємо кут $\varphi = 2^\circ 48'$.

9.2. При розв’язуванні багатьох задач аналітичної геометрії часто використовуються умови перпендикулярності і паралельності прямих.

Нехай прямі I і II задано загальними рівняннями відповідно

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{і} \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Прямі I і II перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли нормальні вектори $\vec{N}_1(A_1;B_1)$ і $\vec{N}_2(A_2;B_2)$ цих прямих перпендикулярні. Оскільки за умовою вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ є ненульовими векторами, то перпендикулярність цих векторів рівносильна рівності нулю їх скалярного добутку:

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{6}$$

Отже, умова (6) є необхідною і достатньою умовою перпендикулярності прямих I і II.

Нехай жодна з прямих I і II не паралельна осі Oy, тобто $B_1\neq 0$ і $B_2\neq 0$. Розділимо обидві частини рівності (6) на $(-B_1)(-B_2)$:

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)+1=0 \;\Leftrightarrow\; k_1k_2+1=0 \;\Leftrightarrow\; k_1k_2=-1\cdot \tag{7}$$

Умова (7) є необхідною і достатньою умовою перпендикулярності прямих I і II з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2.

У §4 доведено необхідні і достатні умови паралельності двох прямих I і II (див. теорему 2 §4). Якщо k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих I і II, то необхідною і достатньою умовою паралельності цих прямих є рівність

$$k_1=k_2. \tag{8}$$

§10. Геометричний зміст нерівності першого степеня з двома невідомими

Розглянемо тричлен

$$\delta=Ax+By+C, \tag{1}$$

в якому коефіцієнти A і B не дорівнюють одночасно нулю.

Всі точки M, координати $(x;y)$ яких задовольняють рівнянню

$$\delta=Ax+By+C=0, \tag{2}$$

лежать на прямій l з нормальним вектором $\overrightarrow{N}(A;B)$.

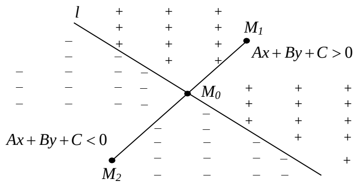

Рис. 1

По відношенню до прямої l вся площина розпадається на дві півплощини, для яких ця пряма є спільною межею (рис. 1). Якщо точка $M_1(x_1; y_1)$ не лежить на прямій l, то

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C \neq 0.$$

Отже, для будь-якої точки $(x; y)$, що не лежить на прямій l, число δ з (1) відмінне від нуля. Виясними геометричний зміст знака числа δ.

Теорема 1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат пряму l задано загальним рівнянням (2). Тоді для координат x, y всіх точок площини $M(x; y)$, які лежать по один бік від прямої l, виконується нерівність

$$\delta = Ax + By + C > 0, \tag{3}$$

а для координат x, y всіх точок $M(x; y)$, які лежать по інший бік від цієї прямої – нерівність (рис .1)

$$\delta = Ax + By + C < 0. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ – дві довільні точки, які лежать по різні боки від прямої l, заданої рівнянням (2). Це означає, що на відрізку M_1M_2 існує внутрішня точка $M_0(x_0; y_0)$, яка належить прямій l (рис. 1). Нехай λ – відношення, в якому точка M_0 ділить напрямний відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тоді $\lambda > 0$ і

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Точка M_0 лежить на прямій l. Тому її координати задовольняють рівнянню прямої l:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + C + \lambda(Ax_2 + By_2 + C) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \delta_1 + \lambda\delta_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\delta_1}{\delta_2}. \tag{5}$$

Оскільки $\lambda > 0$, то з (5) випливає, що числа

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C \text{ і } \delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$$

мають різні знаки.

Зафіксуємо точку M_1, а точку M_2 будемо вважати змінною і такою, що весь час лежить з точкою M_1 по різні боки від прямої l. Тоді число $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + C$ для всіх змінних точок M_2 має один і той же знак, протилежний знаку числа $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + C$.

Нехай тепер точка M_2 – фіксована, а точка M_1 – змінна і весь час знаходиться з точкою M_2 по різні боки від прямої l. Тоді число δ_1 має один і той же знак для всіх змінних точок M_1 і цей знак протилежний знаку числа δ_2.

Отже, для всіх точок однієї півплощини число δ має один і той же знак, а для всіх точок іншої півплощини – один і той же, але протилежний знак.

Теорему доведено.

Означення 1. Півплощину, для координат всіх точок якої $\delta > 0$, називають додатною, а півплощину, для координат всіх точок якої $\delta < 0$ – від'ємною.

Теорема 2. Нехай пряму l задано загальним рівнянням (2). Якщо нормальний вектор $\vec{N}(A;B)$ цієї прямої відкласти від будь-якої точки $M_0(x_0;y_0)$, що лежить на l, то кінець P ($\vec{N} = \overrightarrow{M_0P}$, рис. 2) відкладеного вектора буде знаходитись у додатній півплощині прямої l.

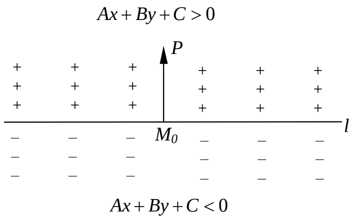

Рис. 2

Доведення. Точка P має координати $x_0 + A, y_0 + B$. Підставимо ці координати у тричлен (1). В результаті матимемо:

$$\delta = A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C =$$

$$= Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.$$

Теорему доведено.

Окремо зупинимось на випадку, коли пряма (2) не проходить через початок координат, тобто коли $C \neq 0$. За точку M_2 візьмемо початок координат – точку O.

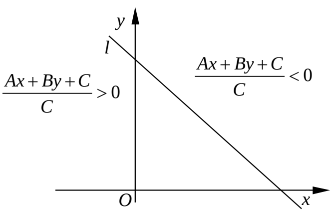

Рис. 3

Теорема 1 у цьому випадку стає більш визначеною, а саме: для координат всіх точок площини, які лежать по той же бік від прямої l, що і початок координат, знак лінійного тричлена (1) співпадає зі знаком числа C, тобто $\frac{\delta}{C} > 0$, а для координат всіх точок, які лежать по інший бік від прямої l, цей знак протилежний знаку числа C, тобто $\frac{\delta}{C} < 0$ (рис. 3).

Приклад 1. Дано дві точки $M_1(1;2)$, $M_2(-1;2)$ і пряму $5x+y+1=0$. Вияснити, чи проходить ця пряма через внутрішню точку відрізка M_1M_2.

Розв'язання. Підставимо координати точок M_1 і M_2 в ліву частину рівняння прямої:

$$\delta_1 = 5\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1 = 8 > 0\,; \quad \delta_2 = 5(-1) + 1\cdot 2 + 1 = -2 < 0\,.$$

Оскільки числа δ_1 і δ_2 мають різні знаки, то точки M_1 і M_2 лежать по різні боки від прямої, тобто дана пряма перетинає відрізок M_1M_2 у його внутрішній точці.

§11. Деякі задачі на пряму лінію на площині

Вище нами вже розглянуто ряд задач на пряму лінію на площині: знаходження різних форм рівняння прямої, обчислення кута між прямими, обчислення відстані від точки до прямої, встановлення умов паралельності та перпендикулярності двох прямих.

У цьому параграфі розглядаються задачі, які розвивають і поглиблюють матеріал попередніх параграфів.

Приклад 1. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(3;4)$ під кутом 60^o до прямої $2x+3y+6=0$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі достатньо знайти кутові коефіцієнти прямих I і II, які позначимо відповідно k_1 і k_2 (рис. 1). Щоб сумістити прямі I і II із заданою прямою l, потрібно пряму I повернути навколо точки M_1 на кут -60^o (за годинниковою стрілкою), а пряму II – навколо точки M_2 на кут $+60^o$ (проти годинникової стрілки), тобто, кут між прямою I і заданою прямою дорівнює -60^o, а кут між прямою II і заданою прямою – $+60^o$.

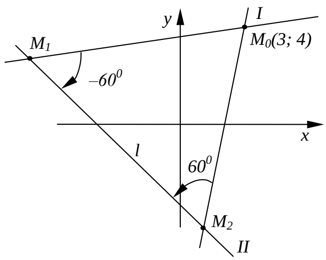

Рис. 1

Кутовий коефіцієнт заданої прямої дорівнює $k = -\frac{2}{3}$. За формулою (4) §9 отримуємо

$$\operatorname{tg}(-60^o) = \frac{-\frac{2}{3} - k_1}{1 + \left(-\frac{2}{3}k_1\right)} \Leftrightarrow -\sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3} - k_1}{1 - \frac{2}{3}k_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k_1 = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}\,;$$

$$\operatorname{tg}60^o = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 - \frac{2}{3}k_2} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 - \frac{2}{3}k_2} \Leftrightarrow k_2 = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}\,.$$

Шукані рівняння прямих знаходяться за формулою (5) §8:

$$y-4=\frac{24-13\sqrt{3}}{3}(x-3) \text{ – рівняння прямої I;}$$

$$y-4=\frac{24+13\sqrt{3}}{3}(x-3) \text{ – рівняння прямої II.}$$

Приклад 2. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими $12x+9y-17=0$ і $3x+4y+11=0$.

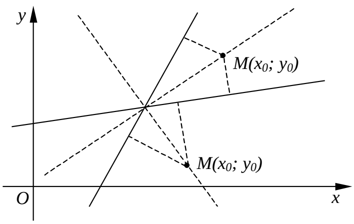

Рис. 2

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 2). Бісектриса – це геометричне місце точок, рівновіддалених від даних прямих. Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – довільна точка бісектриси (не важливо якої), то

$$d_1=\frac{|12x_0+9y_0-17|}{\sqrt{12^2+9^2}}=\frac{|12x_0+9y_0-17|}{15};$$

$$d_2=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{5}.$$

Прирівнюючи d_1 і d_2, отримуємо рівняння шуканих бісектрис:

$$\frac{|12x_0+9y_0-17|}{15}=\frac{|3x_0+4y_0+11|}{5} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{12x_0+9y_0-17}{15}=\dfrac{3x_0+4y_0+11}{5}\\ \dfrac{12x_0+9y_0-17}{15}=-\dfrac{3x_0+4y_0+11}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x_0-3y_0-50=0\\ 21x_0+21y_0+17=0.\end{array}\right.$$

Для змінних координат точки M введемо звичні позначення (x,y), тобто замінимо x_0 на x, а y_0 – на y.

Отже, рівняннями бісектрис кутів між заданими прямими є

$$3x-3y-50=0 \text{ і } 21x+21y+17=0.$$

Легко переконатись, що знайдені бісектриси перпендикулярні. Дійсно, умова перпендикулярності двох прямих $A_1A_2+B_1B_2=0$ виконується: $21\cdot 3+21(-3)=0$.

Приклад 3. Скласти рівняння бісектриси того кута між двома прямими $x+y+2=0$ і $x+7y+3=0$, в якому знаходиться точка $A(2;-1)$.

<u>*Розв'язання*</u>. Підставимо координати точки A у ліві частини рівнянь заданих прямих: $2-1+2=3>0$, $2-7+3=-2<0$. Точка A лежить у тій частині площини, для координат точок якої $x+y+2>0$, $x+7y+3<0$.

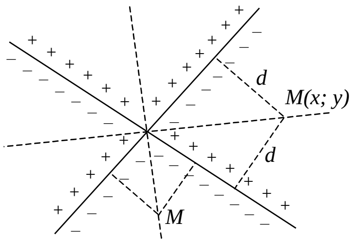

Рис. 3

Тому шукана бісектриса є бісектрисою того кута, для координат внутрішніх точок якого функції $x+y+2$ і $x+7y+3$ мають різні знаки (рис. 3). Отже, рівняння шуканої бісектриси (див. приклад 2) буде таким

$$\frac{x+y+2}{\sqrt{2}}=-\frac{x+7y+3}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow 6x+12y+13=0 .$$

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(2;-1)$, $B(5;3)$, $C(7;11)$. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута A.

Розв'язання. Запишемо рівняння сторін AB і AC:

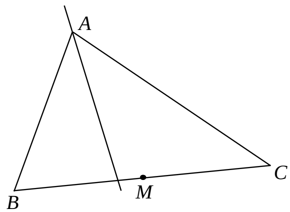

Рис. 4

$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y+1}{3+1} \Leftrightarrow 4x-3y-11=0$ – рівняння сторони AB;

$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y+1}{11+1} \Leftrightarrow 12x-5y-29=0$ – рівняння сторони AC.

Знайдемо середину відрізка BC. Цією серединою є точка $M(6;7)$. Тоді дану задачу можна звести до задачі з прикладу 3.

Якщо $(x;y)$ – змінна точка бісектриси, то

$$\frac{|4x-3y-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12x-5y-29|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Leftrightarrow \pm\frac{4x-3y-11}{5}=\pm\frac{12x-5y-29}{13}. \qquad (1)$$

Підставимо координати точки M у ліві частини рівнянь прямих AB і AC:

$$4\cdot 6-3\cdot 7-11=-3<0 ;\ 12\cdot 6-5\cdot 7-29=8>0 .$$

Отже, ліву частину рівняння (1) беремо зі знаком мінус, а праву частину – зі знаком плюс. В результаті отримуємо рівняння шуканої бісектриси:

$$-\frac{4x-3y-11}{5}=\frac{12x-5y-29}{13} \Leftrightarrow 7x-4y-18=0 .$$