Векторний і мішаний добутки векторів

§1. Орієнтація базису у просторі та на площині

1.1. Нехай у просторі задано два базиси $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$. Збережемо термінологію і позначення §4 гл. VI. Перехід від старого базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до нового базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ проводиться за допомогою матриці переходу

$$T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Елементи стовпців цієї матриці є координатами векторів нового базису у старому базисі: $\vec{u}'\left(a_{11};a_{12};a_{13}\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{v}'\left(a_{21};a_{22};a_{23}\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{w}'\left(a_{31};a_{32};a_{33}\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$. Очевидно, що для координат векторів старого базису відносно цього ж базису можна записати $\vec{u}\left(1;0;0\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{v}\left(0;1;0\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $\vec{w}\left(0;0;1\right)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$.

Справедливі матричні рівності

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Тому матрицю переходу від старого базису до нового базису можна ще означити як матрицю, яка при множенні на матриці-стовпці координат векторів старого базису дає відповідні матриці-стовпці координат векторів нового базису при розгляданні всіх координат у старому базисі.

Якщо матриці-стовпці координат векторів позначити так, як і самі вектори, то рівності (2) можна записати у вигляді

$$\vec{u}'=T\vec{u},\ \vec{v}'=T\vec{v},\ \vec{w}'=T\vec{w}. \qquad (3)$$

Такий матрично-векторний запис матричних рівностей є досить зручним і буде використовуватись нами в наступних главах.

Нагадаємо ***властивості матриці переходу*** T:

1. $\det T\neq 0$. Тому існує обернена матриця T^{-1} з визначником $\det T^{-1}=\dfrac{1}{\det T}$.

2. Рівності (2) показують, що перехід від старого базису до цього ж базису проводиться за допомогою матриці $T=E$, де E – одинична матриця.

3. Перехід від нового базису до старого проводиться за допомогою оберненої матриці T^{-1}. У першому стовпці цієї матриці стоять координати

старого базисного вектора $\vec{u}$, у другому стовпці – вектора $\vec{v}$ і в третьому стовпці – вектора $\vec{w}$ відносно нового базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$.

4. Якщо T – матриця переходу від базису I: $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису II: $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$, а T_1 – матриця переходу від базису II до базису III: $\{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$, то матрицею переходу від базису I до базису III буде матриця $T_2 = TT_1$ (див. теорему 1 §4 гл. VI.)

Означення 1. Будемо говорити, що базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ має таку ж орієнтацію, що і базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, якщо $\det T > 0$. Для базисів ***однакової орієнтації*** будемо писати $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Якщо $\det T < 0$, то базиси $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ і $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ будемо називати базисами з ***протилежною орієнтацією*** і писати $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} ; \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Теорема 1. Означення однакової орієнтації двох базисів задовольняє аксіомам рівності, тобто вимогам:

1. Рефлексивності: $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$;

2. Симетрії: з того, що $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ випливає, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$.

3. Транзитивності: з того, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\} : \{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$ випливає, що $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{u}'';\vec{v}'';\vec{w}''\}$.

Доведення. 1. Згідно з властивістю 2 матриці переходу T маємо

$$T = E \Rightarrow \det T = \det E = 1 > 0 .$$

2. Ця властивість випливає з властивостей 1, 3 матриці переходу T.

3. Згідно з властивістю 4 матриці переходу маємо $T_2 = TT_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \det T_2 = \det T \det T_1$. За умовою $\det T > 0$, $\det T_1 > 0$. Тому $\det T_2 > 0$.

Теорему доведено.

З наведеного вище випливає, що множина всіх базисів простору розпадається на класи (підмножини базисів), які попарно не перетинаються і мають таку властивість: всі базиси одного якого-небудь класу є базисами однакової орієнтації, а будь-які два базиси, що належать різним класам, мають протилежну орієнтацію.

Теорема 2. Число таких класів дорівнює двом.

Доведення. Для того щоб переконатися, що існує принаймні два класи, візьмемо який-небудь базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і поряд з ним розглянемо базис $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Матрицею переходу від першого з цих базисів до другого є матриця

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \det T=-1\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1<0\,.$$

Отже, базиси $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ і $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ мають протилежну орієнтацію, а тому належать до різних класів.

Тепер доведемо, що довільний базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ належить до одного з двох класів: або до класу, що містить базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, або до класу, що містить базис $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Іншими словами, доведемо, що довільний базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$, який має протилежну орієнтацію з базисом $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, є базисом однакової орієнтації з базисом $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$. Дійсно, нехай матриця переходу від базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ має від'ємний визначник. Визначник матриці переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ дорівнює –1. Тому матриця переходу від базису $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{v};-\vec{w}\}$ (будучи добутком двох матриць) має додатний визначник. Теорему доведено.

Отже, множина всіх базисів простору розбивається на ***два*** класи так, що будь-який базис належить до одного і тільки до одного класу. Два базиси, які належать до одного класу, мають однакову орієнтацію. Будь-які два базиси, які належать до різних класів, орієнтовані протилежно.

Один з цих класів називають класом правих базисів, а самі базиси – ***правими***. Базиси, які не належать до класу правих базисів, називають ***лівими***.

1.2. У векторній алгебрі поняття правого базису вводиться наступним чином. Відкладемо всі три вектори базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ від одної точки O (рис. 1).

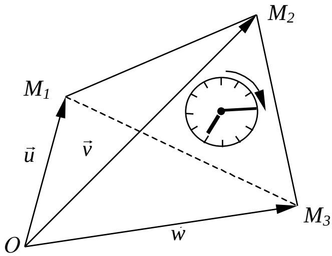

Рис. 1

Кінці M_1, M_2, M_3 цих векторів не тільки визначають трикутник, а напрямок обходу $M_1M_2M_3M_1$ на ньому. Якщо для спостерігача, який дивиться на трикутник $M_1M_2M_3$ з точки O, обхід трикутника в напрямку $M_1M_2M_3M_1$ відбувається за годинниковою стрілкою (годинник слід уявити у площині трикутника $M_1M_2M_3$ циферблатом до спостерігача), то базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ називають ***правим***, якщо ж проти руху годинникової стрілки – то ***лівим***.

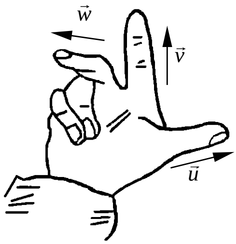

Рис. 2

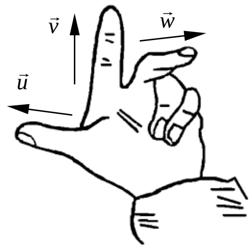

Рис. 3

Правий базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ (ще кажуть, праву трійку векторів) отримаємо, наприклад, тоді, коли вектор $\vec{u}$ спрямуємо вздовж великого пальця правої руки, як показано на рис. 2, вектор $\vec{v}$ – вздовж вказівного пальця, а вектор $\vec{w}$ – вздовж середнього пальця.

Те ж саме, але по відношенню пальців лівої руки (рис. 3), демонструє ліву трійку векторів або лівий базис.

Приклад 1. Показати, що

$$\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\} : \{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}. \qquad (4)$$

Розв'язання. Для матриці T_1 переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\}$ маємо

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \det T_1 = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$ Тому $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{w};\vec{u};\vec{v}\}$. Аналогічно, для матриці T_2 переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}$:

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \det T_2 = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$ Тому $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\} : \{\vec{v};\vec{w};\vec{u}\}$.

Приклад 2. Показати, що

$$1)\ \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\};\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\};$$
$$2)\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\} : \{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\} : \{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}. \qquad (5)$$

Розв'язання. Нехай T_3 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\}$. Тоді

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det T_3 = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$ Отже, $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\};\ \{\vec{v};\vec{u};\vec{w}\}$.

Нехай T_4 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\}$.Тоді

$$T_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \det T_4=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0.\ \text{Отже, } \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}=\{\vec{w};\vec{v};\vec{u}\}.$$

Нехай T_5 – матриця переходу від базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ до базису $\{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}$. Тоді

$$T_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \det T_5=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0.\ \text{Отже, } \{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}=\{\vec{u};\vec{w};\vec{v}\}.$$

Всі три базиси з 2) мають протилежну орієнтацію з базисом $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, а тому всі вони орієнтовані однаково.

Приклади 1, 2 показують, що з трьох некомпланарних векторів $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ можна утворити шість різних базисів. При цьому:

1. Базиси (4), які отримуються з базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ круговою перестановкою векторів, мають одну і ту ж орієнтацію.

2. При перестановці лише двох векторів базису його орієнтація змінюється на протилежну.

3. Базиси (5) мають орієнтацію, протилежну до орієнтації базисів (4).

Отже, з прикладів 1, 2 випливає, що орієнтацію базису можна визначити за допомогою обчислень, якщо відома орієнтація якого-небудь одного базису, тобто у цьому випадку не має потреби удаватися до наочних міркувань.

В кожному з двох класів базисів є декартовий прямокутний базис, тобто базис, вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ якого взаємно-ортогональні і мають одиничну довжину (рис. 4, 5).

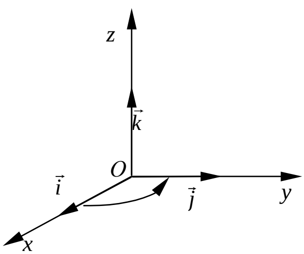

Рис. 4

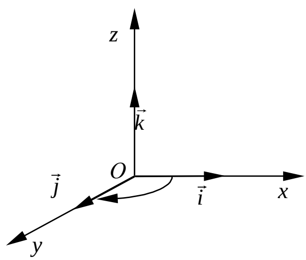

Рис. 5

Поряд з розглянутими вище правилами, праву та ліву трійки векторів можна описати ще так: базис $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ є правим, якщо найменший поворот вектора $\vec{i}$ до його співпадання з вектором $\vec{j}$ можна здійснити проти годинникової стрілки, спостерігаючи за цим поворотом з кінця вектора $\vec{k}$ (рис. 4). Якщо ж найменший поворот вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ здійснюється за годинниковою стрілкою (при спостереженні з тієї ж точки), то базис $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ є лівим.

Це правило застосовне до довільного базису $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$.

Домовимось у подальшому через $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ позначати ***правий*** декартовий прямокутний базис простору, а систему координат, побудовану на цьому базисі, називати ***правою*** декартовою прямокутною системою координат.

1.3. <u>Означення 2</u>. Базис $\{\vec{u};\vec{v}\}$ на площині називається правим, якщо найменший поворот від $\vec{u}$ до $\vec{v}$ здійснюється проти годинникової стрілки, і називається лівим – якщо за годинниковою стрілкою.

<u>Означення 3</u>. Два базиси $\{\vec{u};\vec{v}\}$ і $\{\vec{u}';\vec{v}'\}$ однієї площини назвемо базисами однакової орієнтації і будемо писати $\{\vec{u};\vec{v}\} \sim \{\vec{u}';\vec{v}'\}$, якщо $\det T > 0$.

Множина всіх базисів однієї площини розбивається на два класи: на множину правих базисів і множину лівих базисів. Клас правих базисів визначається однозначно вибором деякого одного правого базису. Домовляємось у подальшому правий прямокутний декартовий базис позначати через $\{\vec{i};\vec{j}\}$, $\left(\vec{i},\hat{\ }\vec{j}\right) = +90^0$.

Якщо задано деякий правий базис $\{\vec{i};\vec{j}\}$ на площині чи $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ у просторі, то кажуть, що на площині чи в просторі за допомогою базису $\{\vec{i};\vec{j}\}$ чи $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ задано додатну орієнтацію. Площину чи простір називають орієнтованою чи орієнтованим.

Орієнтацію, яку задано лівим прямокутним декартовим базисом, називають від'ємною.

§2. Векторний добуток та його властивості

Розглянемо праву декартову прямокутну систему координат з базисом $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати

$$\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\quad \vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}.$$

<u>Означення 1</u>. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор

$$\vec{c} = \left(y_1z_2 - y_2z_1\right)\vec{i} - \left(x_1z_2 - x_2z_1\right)\vec{j} + \left(x_1y_2 - x_2y_1\right)\vec{k}. \qquad (1)$$

Для векторного добутку введемо позначення $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

Рівність (1) можна записати у вигляді “узагальненого визначника”

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Якщо розкласти визначник (2) за елементами першого рядка, то прийдемо до рівності (1).

З властивостей визначників випливають такі властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативність).

Доведення.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Для довільних векторів $\vec{a}_1\left(x_1; y_1; z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{a}_2\left(x_2; y_2; z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{a}_3\left(x_3; y_3; z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і довільних чисел λ і μ справедливі рівності

$$\begin{aligned} &\left(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2\right) \times \vec{a}_3 = \lambda\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3\right) + \mu\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right), \\ &\vec{a}_3 \times \left(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2\right) = \lambda\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) + \mu\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_2\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Доведення.

$$\left(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2\right) \times \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda x_1 + \mu x_2 & \lambda y_1 + \mu y_2 & \lambda z_1 + \mu z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mu x_2 & \mu y_2 & \mu z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3\right) + \mu\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right);$$

$$\vec{a}_3 \times \left(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2\right) = -\left(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2\right) \times \vec{a}_3 = -\left[\lambda\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3\right) + \mu\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right)\right] =$$

$$= \lambda\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) + \mu\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_2\right).$$

3. $\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\vec{0}$.

<u>*Доведення*</u>. Нехай $\vec{a}\left(x,y,z\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Тоді

$$\lambda\vec{a}\times\mu\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda x & \lambda y & \lambda z\\ \mu x & \mu y & \mu z\end{vmatrix}=\lambda\mu\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}\cdot$$

У практичних обчисленнях можна рекомендувати такий порядок знаходження координат векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$:

1) складаємо матрицю розміру 2×3 з координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}; \tag{4}$$

2) щоб отримати першу координату вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, закриємо перший стовпчик матриці (4) і обчислимо визначник 2-го порядку, який залишається;

3) друга координата вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ отримується так: закриваємо другий стовпчик матриці (4) і визначник, що залишається, беремо з протилежним знаком;

4) третя координата вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ отримується в результаті обчислення визначника 2-го порядку, який залишається після закриття третього стовпця матриці (4).

Приклад 1. Знайти $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}\left(1;2;3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(2;1;1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Розв'язання. Складемо матрицю $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Нехай $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Тоді $\vec{c}\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ або $\vec{c}\left(-1;5;-3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Приклад 2. Знайти $\vec{i}\times\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{k}$.

Розв'язання. Складемо матриці з координат векторів $\vec{i}$ і $\vec{i}$ та векторів $\vec{i}$ і $\vec{j}$:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Очевидно, що $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\left(0;0;1\right)$. Аналогічно обчислюються інші векторні добутки. Результати цих обчислень подамо у вигляді таблиці

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Приклад 3. Обчислити $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(5\vec{c}-3\vec{a}\right)$.

Розв'язання. $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(5\vec{c}-3\vec{a}\right)=2\vec{a}\times5\vec{c}+3\vec{b}\times5\vec{c}-2\vec{a}\times3\vec{a}-3\vec{b}\times3\vec{a}=$

$=10\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+15\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)-9\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=10\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+15\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Приклад 4. Обчислити $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

Розв'язання. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}=2\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$.

§3. Геометричні властивості векторного добутку

3.1. Наведемо геометричні властивості векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивість I. Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$.

Доведення. Нехай $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=x_1\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$.

Отже, $\vec{a}\perp\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. Крім того, $\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=0$.

Властивість II. Довжина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right). \tag{1}$$

Доведення. Нехай $\varphi=\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)$. Тоді

$$S^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\varphi=$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2=$$

$$=y_1^2x_2^2+z_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+z_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2z_2^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2.$$

З іншого боку,

$$|\vec{a}\times\vec{b}\,|^2=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2=$$

$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(x_1z_2-x_2z_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2=$$

$$=y_1^2x_2^2+z_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+z_1^2y_2^2+x_1^2z_2^2+y_1^2z_2^2-2x_1x_2y_1y_2-2x_1x_2z_1z_2-2y_1y_2z_1z_2\,.$$

Отже, $|\vec{a}\times\vec{b}\,|^2=S^2 \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}\,|=S$.

Властивість III. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Ця властивість є наслідком попередньої властивості. Проте можна дати таке незалежне доведення.

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Дійсно, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ або $x_2=\lambda x_1$, $y_2=\lambda y_1$, $z_2=\lambda z_1$. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{vmatrix}=\vec{0}\,.$$

Достатність. Нехай тепер $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Покажемо, що тоді $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. Дійсно, за умови $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ маємо

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\vec{0}\,. \qquad (2)$$

Помножимо рівність (2) по черзі на $\vec{i}, \vec{j}$ та $\vec{k}$, врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.

В результаті отримуємо

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0\,, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}=0\,, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0\,.$$

Згідно з теоремою 2 §4 гл. V робимо висновок, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Властивість IV. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ утворюють правий базис.

<u>*Доведення*</u>. Достатньо показати, що визначник матриці переходу T від базису $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$ до базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times\vec{b}\right\}$ є додатним. Для зручності запишемо визначник, транспонований по відношенню до визначника матриці T , і розкладемо його за елементами останнього рядка:

$$\det T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)^2 > 0,$$

оскільки $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні.

3.2. Властивості I–IV визначають векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то згідно з властивістю III $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні, то відповідно до властивості I вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ розміщується перпендикулярно до площини, в якій вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють базис. Цим однозначно (з точністю до паралельності) визначається пряма, до якої вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ є паралельним. Довжина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ згідно з властивістю II чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а напрямок вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ однозначно визначається тим, що базис $\left\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{a} \times \vec{b}\right\}$ – правий (властивість IV).

Отже, властивості I–IV можна було б прийняти за означення векторного добутку. Це означення в декартовому прямокутному базисі задовольняв би вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, який визначається формулою (1) §2 і тільки він. Досить часто так і роблять: векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор, який задовольняє властивостям I–IV. Тоді формулу (1) §2 виводять з цього означення і використовують в обчисленнях.

Ілюстрація геометричних властивостей векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ наведена на рис. 1.

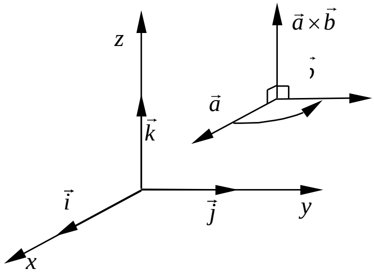

Рис. 1

3.3. Векторний добуток може використовуватись для обчислень площ.

Задача 1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Розв'язання. Згідно з формулою (1) §2 і властивістю II

$$S_{\square}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}\ \text{(кв. од).} \qquad (3)$$

Задача 2. Обчислити площу трикутника, заданого координатами своїх вершин: $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Розв'язання. Задача зводиться до обчислення половини площі паралелограма, побудованого на векторах

$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}\left(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Отже,

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}\ \text{(кв. од.).} \qquad (4)$$

§4. Мішаний добуток трьох векторів

4.1. Нехай задано **упорядковану** трійку векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, тобто вказано не тільки набір векторів, а й порядок, в якому ці вектори слід розглядати: $\vec{a}$ – перший вектор, $\vec{b}$ – другий, $\vec{c}$ – третій. Відмітимо, що упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворює базис $\left\{\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}\right\}$.

Означення 1. Мішаним добутком упорядкованої трійки векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Для мішаного добутку будемо застосовувати позначення $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)$. Тоді згідно з означенням 1

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\ . \qquad (1)$$

Доведемо властивість лінійності мішаного добутку.

Теорема 1. Мішаний добуток є лінійним по кожному з множників, тобто для довільних чисел λ, μ і довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ справедливі рівності:

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right), \tag{2}$$

$$\left(\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{d},\vec{c}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{d},\vec{c}\right), \tag{3}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right). \tag{4}$$

<u>Доведення</u>. Справедливість рівності (2) випливає з властивості лінійності векторного та скалярного добутків:

$$\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right)=\left[\left(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d}\right)\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left[\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\mu\left(\vec{d}\times\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{c}=$$
$$=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\mu\left(\vec{d}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Аналогічно доводиться рівність (3).

Справедливість рівності (4) випливає з властивості лінійності скалярного добутку

$$\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\mu\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{d}=$$
$$=\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\mu\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right).$$

Теорему доведено.

4.2. Геометричний зміст мішаного добутку відображає наступна теорема.

Теорема 2. Мішаний добуток трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, зі знаком "+", якщо трійка векторів – права і зі знаком "-", якщо ця трійка – ліва.

<u>Доведення</u>. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Оскільки трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ також є правою, то вектори $\vec{c}$ і $\vec{a}\times\vec{b}$ розміщені в одному півпросторі по відношенню до площини векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1).

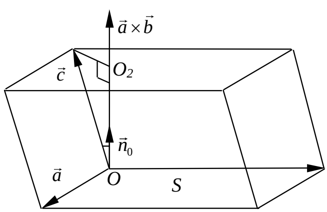

Рис. 1

Позначимо через $\vec{n}_0$ одиничний вектор у напрямку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, а через S – площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Очевидно, що кут $\left(\vec{n}_0, \hat{\ } \vec{c}\right)$ – гострий.

За означенням

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S\vec{n}_0\cdot\vec{c}\,, \tag{5}$$

але

$$\vec{n}_0\cdot\vec{c}=1\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\left(\widehat{\vec{n}_0,\,\vec{c}}\right)=h\,, \tag{6}$$

де h – висота паралелепіпеда (рис. 1). Отже,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=Sh=V \text{ – об'єм паралелепіпеда} \tag{7}$$

Нехай тепер вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють ліву трійку. Тоді трійка векторів $\vec{a},\vec{b},(-\vec{c})$ буде правою. Згідно з доведеним вище

$$\begin{gathered}\left(\vec{a},\vec{b},(-\vec{c})\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot(-\vec{c})=V\Leftrightarrow-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=V\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-V\,.\end{gathered} \tag{8}$$

Отже, для будь-якої трійки векторів

$$V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|. \tag{9}$$

Теорема 3. Для того щоб вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.

Доведення. *Необхідність.* Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні. Без будь-якої втрати загальності можна вважати, що вони мають спільний початок. Але тоді ці вектори лежать в одній площині і об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює нулю. Згідно з теоремою 2 $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

Достатність. Нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$. Тоді або один з векторів $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ дорівнює нулю або вектори $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\vec{c}$ взаємно-перпендикулярні (це означає, вектор $\vec{c}$ лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$). В обох випадках вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є компланарними.

4.3. Теорема 4. Якщо в декартовому прямокутному базисі задано три вектори $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то їх мішаний добуток можна знайти за допомогою визначника третього порядку, утвореного з координат цих векторів, а саме

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{10}$$

<u>Доведення</u>. Дійсно,

$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3$. Справа в отриманій рівності маємо розклад визначника (10) за елементами третього рядка, що і доводить теорему.

Відмітимо, що

$$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=\begin{cases} 1, & \text{якщо } \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\} - \text{правий декартовий прямокутний базис} \\ -1, & \text{якщо } \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\} - \text{лівий декартовий прямокутний базис.} \end{cases}$$

Теорему 3 можна подати у координатній формі.

Теорема 3′. Для того щоб вектори $\vec{a}\left(x_1;x_2;x_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ були компланарними, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0\,. \tag{11}$$

Теорема 5. Якщо у мішаному добутку два множники однакові або колінеарні, то він дорівнює нулю.

<u>Доведення</u>. Дійсно, в цьому випадку визначник (10) буде містити два однакових або два пропорційних рядки, а тому дорівнюватиме нулю.

Відмітимо, що теорема 5 є безпосереднім наслідком теореми 3, оскільки три вектори у даному випадку є компланарними.

4.4. Теорема 6. Для того щоб базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ був правим, необхідно і достатньо, щоб $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$.

<u>Доведення</u>. Необхідність. Нехай базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ – правий. Тоді необхідна умова $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$ випливає безпосередньо з теореми 2.

Достатність. Нехай $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$. Тоді за формулою (10) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\det T^T=\det T>0$, де T – матриця переходу від правого базису $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$ до базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$, а T^T – транспонована матриця до матриці T. Отже, якщо $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$, то базис $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ – правий, що і доводить теорему.

Теорема 7. При перестановці двох множників мішаний добуток змінює знак.

<u>Доведення</u>. Перестановка двох векторів базису $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$ призводить до зміни його орієнтації (див. §1, приклади 1, 2). Тому на основі теореми 6

можна стверджувати, що знак мішаного добутку $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ при перестановці двох множників буде змінюватись. Що стосується модуля мішаного добутку, то він згідно з формулою (9) при будь-якій перестановці множників не змінюється.

Зауваження 1. Для доведення теореми 7 можна скористатись також формулою (10), наприклад

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right). \qquad (12)$$

Тут використано властивість визначника змінювати знак при перестановці рядків.
Як наслідок теореми 7 можна записати рівності

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right). \qquad (13)$$

Зауваження 2. Розглянемо рядки довільного визначника

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

як координати векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_{2,},\vec{a}_3$ у деякій декартовій прямокутній правій системі координат.

Тоді $\Delta=\begin{cases} V, \text{ якщо трійка векторів } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ є правою,} \\ -V, \text{ якщо трійка векторів } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \text{ є лівою,} \end{cases}$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1,\vec{a}_{2,},\vec{a}_3$.

Отже, довільний визначник третього порядку можна розглядати з точністю до знака як об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах, координати яких є рядками цього визначника.

4.5. Скористаємось мішаним добутком векторів для знаходження об'єму трикутної піраміди.

Нехай дано трикутну піраміду $M_1M_2M_3M_4$ (рис. 2).

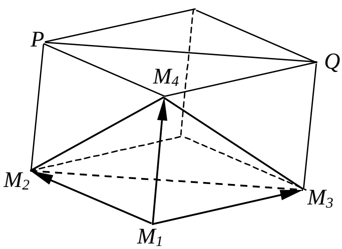

Рис. 2

На ребрах M_1M_2, M_1M_3, M_1M_4 побудуємо паралелепіпед. Об'єм трикутної піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ об'єму призми $M_1M_2M_3M_4PQ$. Об'єм цієї призми у свою чергу дорівнює $\frac{1}{2}$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$.

Тому об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$ дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму цього паралелепіпеда.

Отже,

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3},\ \overrightarrow{M_1M_4}\right)\right|. \qquad (14)$$

Якщо $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_4\left(x_4;y_4;z_4\right)_{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то формулу (14) можна записати у координатній формі:

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right|. \qquad (15)$$

Нагадаємо, що визначник береться по модулю тому, що мішаний добуток додатний, якщо трійка векторів – права, і від'ємний, якщо ця трійка – ліва.

§5. Подвійний векторний добуток

Нехай $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{c}\left(c_1;c_2;c_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – довільні вектори.

Означення 1. Вектор $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ називається подвійним векторним добутком.

Наступна теорема дає просте правило знаходження подвійного векторного добутку.

Теорема 1. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива формула

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}, \qquad (1)$$

де $\vec{a}\cdot\vec{c}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, а $\vec{a}\cdot\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Доведення. Оскільки

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k}, \text{ то}$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1\right)\vec{i}+\left(a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+a_3b_2c_3-a_3b_3c_2\right)\vec{j}+$$

$$+\left(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3+a_2b_3c_2-a_2b_2c_3\right)\vec{k}=$$

$$=\left[b_1\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_1\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{i}+$$

$$+\left[b_2\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_2\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{j}+$$

$$+\left[b_3\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)-c_3\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\right]\vec{k}=$$

$$=\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)=$$

$$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,.$$

Теорема 2. Для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива тотожність

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}\,. \tag{2}$$

<u>*Доведення*</u>. За теоремою 1 маємо:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,,$$

$$\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\,,$$

$$\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\,.$$

Додаючи почленно ці рівності і використовуючи комутативність скалярного добутку $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$, приходимо до тотожності (2).