Координати вектора і точки. Координатний метод розв’язування геометричних задач

§1. Координати вектора на площині

Нехай $\vec{u}$ і $\vec{v}$ – два довільних неколінеарних вектори на площині P.

Означення 1. Пару неколінеарних векторів $\vec{u}$, $\vec{v}$ будемо називати базисом на площині і позначати $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$. Самі вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ ще називають координатними або базисними, або такими, що утворюють базис.

Теорема 1. Кожен вектор $\vec{a}$ площини P у заданому базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$ однозначно визначається парою чисел.

Доведення. Перенесемо всі три вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ в одну точку O площини P (рис. 1). Через кінець A вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ проведемо пряму паралельно вектору $\vec{v}$ до її перетину з прямою, на якій лежать вектор $\vec{u}$. Оскільки $\vec{u}\not\parallel\vec{v}$, то ці прямі перетинаються. Позначимо точку їх перетину через B.

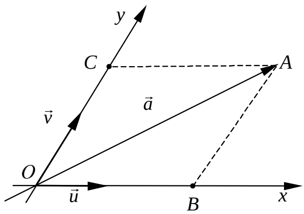


Рис. 1

Тоді

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA} \qquad (1)$$

Оскільки $\overrightarrow{OB}\parallel\vec{u}$, то існує таке число α, що

$$\overrightarrow{OB}=\alpha\vec{u}\ . \qquad (2)$$

Вектор $\overrightarrow{BA}\parallel\vec{v}$, тому існує таке число β, що

$$\overrightarrow{BA}=\beta\vec{v}\ . \qquad (3)$$

Підставляючи (2) і (3) в рівність (1), отримуємо

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\ . \qquad (4)$$

Отже, кожному вектору $\vec{a}$ відповідає пара чисел α, β, для яких виконується рівність (4).

Означення 2. Рівність (4) називається розкладом вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$.

Тепер доведемо єдиність розкладу вектора у даному базисі. Нехай поряд з рівністю (4) виконується рівність.

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{u}+\beta_1\vec{v}\ . \qquad (5)$$

Порівнюючи рівності (4) і (5), отримуємо

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha_1\vec{u}+\beta_1\vec{v} \Leftrightarrow (\alpha-\alpha_1)\vec{u}+(\beta-\beta_1)\vec{v}=0\,. \qquad (6)$$

Доведемо, що рівність (6) виконується лише за умови $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$.

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $\alpha-\alpha_1\neq 0$. Тоді рівність (6) можна записати у вигляді

$$\vec{u}=-\frac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1}\vec{v}\,. \qquad (7)$$

З рівності (7) випливає, що $\vec{u}\parallel\vec{v}$. Це суперечить умові. Отже, $\alpha-\alpha_1=0\Leftrightarrow\alpha=\alpha_1$.

Аналогічно доводиться, що $\beta=\beta_1$. Теорему доведено.

Означення 3. Числа α і β називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}\}$. При цьому для вектора $\vec{a}$ будемо писати $\vec{a}(\alpha;\ \beta)_{\vec{u},\vec{v}}$.

Вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ і точка O визначають координатні осі Ox, Oy (рис. 1). Будемо говорити, що в цьому випадку побудовано систему координат. Якщо вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$ загального розташування, то система координат називається загальною або ***афінною***.

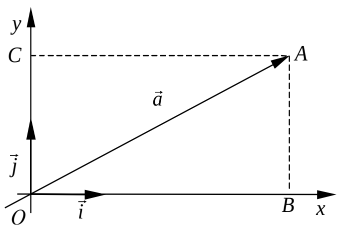


Рис. 2

Однак, у подальшому будемо користуватися спеціальною системою координат, базисні вектори якої одиничні і перпендикулярні. Така система координат називається ***декартовою прямокутною***, а її базисні вектори позначаються через $\vec{i}$, $\vec{j}$. Рис. 1 у цьому випадку приймає вигляд рис. 2.

Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{i};\vec{j}\}$:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\,. \qquad (8)$$

Вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$ назвемо ортогональними складовими вектора $\vec{a}$. Абсолютна величина першої координати x дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{OB}$, тобто $|x|=|\overrightarrow{OB}|$. Аналогічно, $|y|=|\overrightarrow{OC}|$.

З прямокутного трикутника OBA отримуємо

$$|\vec{a}|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=x^2+y^2\Leftrightarrow|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (9)$$

За формулою (9) знаходиться довжина вектора, заданого своїми декартовими прямокутними координатами x, y.

Приклад 1. Побудувати вектор $\vec{a}(2;-3)_{\vec{i},\vec{j}}$ і знайти його довжину.

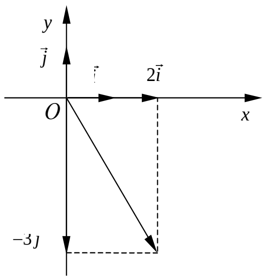


Рис. 3

Розв'язання. Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ за базисними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$: $\vec{a} = 2\vec{i} + (-3)\vec{j}$.

Вектор $\vec{a}$ знаходиться як сума векторів за правилом паралелограма, побудованого на векторах $2\vec{i}$ і $-3\vec{j}$ (рис. 3). Використовуючи формулу (9), отримуємо

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \text{ (лін. од.).}$$

§2. Координати вектора у просторі

<u>Означення 1</u>. Три некомпланарні вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, взяті у певному порядку, називаються координатними або базисними. Будемо говорити, що вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ утворюють базис простору і записувати $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$, називаючи вектор $\vec{u}$ першим вектором цього базису, $\vec{v}$ – другим, а $\vec{w}$ – третім.

Теорема 1. Кожний вектор $\vec{a}$ простору в заданому базисі $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ однозначно визначається трійкою чисел.

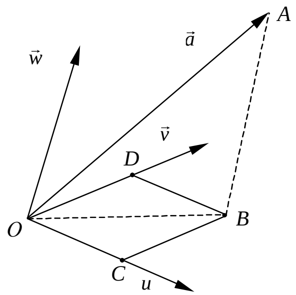


Рис. 1

<u>*Доведення*</u>. Відкладемо вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ від деякої точки O (рис. 1).

Через точку A $\left(\overrightarrow{OA} = \vec{a}\right)$ проведемо пряму паралельно вектору $\vec{w}$. Точку перетину цієї прямої з площиною, яка проходить через вектори $\vec{u}$ і $\vec{v}$, позначимо B.

Розкладемо вектор $\overrightarrow{OB}$ за векторами $\vec{u}$ і $\vec{v}$, що завжди можливо згідно з теоремою 1 §1. Нехай цей розклад має вигляд

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \tag{1}$$

де $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{OC},\ \beta\vec{v} = \overrightarrow{OD}$.

Тоді

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, \tag{2}$$

де $\overrightarrow{BA} = \gamma\vec{w}$, оскільки вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\vec{w}$ колінеарні.

Отже, вектору $\vec{a}$ співставляється трійка чисел α, β, γ так, що справедлива рівність (2). Цю рівність називають розкладом вектора $\vec{a}$ у даному базисі.

Доведемо тепер єдиність цього розкладу. Припустимо, що поряд з рівністю (2) виконується рівність

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v} + \gamma_1\vec{w}\,. \tag{3}$$

Порівнюючи рівності (2) і (3), отримуємо

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha_1\vec{u} + \beta_1\vec{v} + \gamma_1\vec{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \alpha_1)\vec{u} + (\beta - \beta_1)\vec{v} + (\gamma - \gamma_1)\vec{w} = 0\,. \tag{4}$$

Рівність (4) справедлива лише за умови $\alpha - \alpha_1 = 0$, $\beta - \beta_1 = 0$, $\gamma - \gamma_1 = 0$.

Дійсно, якщо припустити, що $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, то рівність (4) можна записати в такому вигляді

$$\vec{u} = -\frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}\vec{v} - \frac{\gamma - \gamma_1}{\alpha - \alpha_1}\vec{w}\,,$$

тобто вектор $\vec{u}$ лежить в одній площині з векторами $\vec{v}$ і $\vec{w}$, що суперечить умові некомпланарності векторів $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Отже, $\alpha - \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1$.

Аналогічно доводиться, що

$$\beta - \beta_1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \beta_1 \quad \text{і} \quad \gamma - \gamma_1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \gamma_1\,.$$

Теорему 1 доведено.

Означення 2. Числа α, β, γ називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{u};\ \vec{v}; \vec{w}\}$. Для вектора $\vec{a}$ будемо писати $\vec{a}(\alpha; \beta; \gamma)_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$.

Означення 3. Базис називається ***декартовим прямокутним***, якщо базисні вектори взаємно перпендикулярні і їх довжини дорівнюють одиниці.

У подальшому будемо розглядати декартовий прямокутний базис, базисні вектори позначати $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі – x, y, z, тобто

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{5}$$

Декартова прямокутна система координат у просторі будується наступним чином: фіксується деяка довільна точка O і в цій точці будується прямокутний базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. 2).

Точка O називається початком координат, а прямі, які проходять через вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і напрямки на яких введено відповідно векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатними осями. Вісь, яка проходить через вектор $\vec{i}$, називається віссю

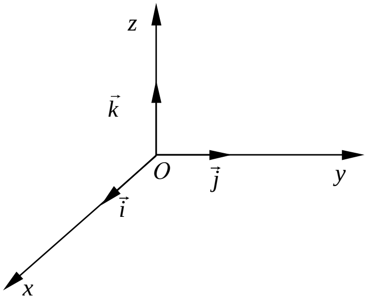
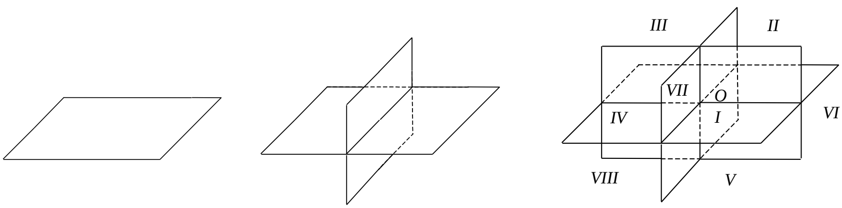


Рис. 2

абсцис або віссю Ox; через вектор $\vec{j}$ – віссю ординат або віссю Oy; через вектор $\vec{k}$ – віссю аплікат або віссю Oz. Площини, які проходять через будь-яку пару координатних осей, називаються координатними і позначаються: площина xOy, площина yOz, площина xOz.

Координатні площини ділять весь простір на 8 частин. Дійсно, якщо ми проведемо тільки площину xOy, то вона розділить простір на дві частини (рис. 3а)). Якщо тепер провести площину xOz, то кожна з цих двох частин розділиться ще на дві частини. Будемо мати чотири частини (рис. 3б)). Якщо ж провести площину yOz, то кожна з цих чотирьох частин розділиться ще на дві частини і ми будемо мати 8 частин (рис. 3в)).



а) б) в)

Рис. 3

Ці частини називаються ***октантами***. Октант, який визначається додатними частинами координатних осей, називається нормальним або першим октантом. Будемо нумерувати октанти наступним чином. Спочатку нумеруємо октанти, які лежать по той же бік площини xOy, що і перший октант (назвемо ці октанти верхніми). Починаємо з першого октанта в порядку проти годинкової стрілки, якщо дивитись зверху. Потім нумеруємо нижні октанти: октант, який знаходиться під першим, вважається п’ятим, і далі нумерація йде проти годинникової стрілки (див. рис. 3в)).

Якщо одна з координат вектора $\vec{a}$ дорівнює нулю, то цей вектор лежить в одній з координатних площин, а саме:

якщо $x = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині yOz;

якщо $y = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині xOz;

якщо $z = 0$, то вектор $\vec{a}$ лежить у площині xOy.

Якщо дві координати дорівнюють нулю, то вектор $\vec{a}$ лежить на одній з координатних осей:

якщо $x=0$ і $y=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Oz;

якщо $y=0$ і $z=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Ox;

якщо $x=0$ і $z=0$, то вектор $\vec{a}$ лежить на осі Oy.

Якщо вектор $\vec{a}$ не лежить в жодній з координатних площин, то за допомогою знаків чисел x, y, z можна визначити, в якому з восьми координатних октантів він знаходиться. Дійсно,

якщо $x>0,\ y>0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить першому октанту;

якщо $x<0,\ y>0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить другому октанту;

якщо $x<0,\ y<0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить третьому октанту;

якщо $x>0,\ y<0,\ z>0$, то $\vec{a}$ належить четвертому октанту;

якщо $x>0,\ y>0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить п'ятому октанту;

якщо $x<0,\ y>0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить шостому октанту;

якщо $x<0,\ y<0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить сьомому октанту;

якщо $x>0,\ y<0,\ z<0$, то $\vec{a}$ належить восьмому октанту.

Справедливі і обернені твердження. За цими критеріями легко визначити розташування вектора у просторі за його координатами, не використовуючи рисунок . Так, наприклад, вектор $\vec{a}(1;3;4)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ розташований у першому октанті; $\vec{b}(2;-5;6)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у четвертому, $\vec{c}(-3;-1;-2)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у сьомому, $\vec{d}(-6;2;-1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ – у шостому.

Приклад 1. Побудувати вектор $\vec{a}(2;-2;-3)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і знайти його довжину.

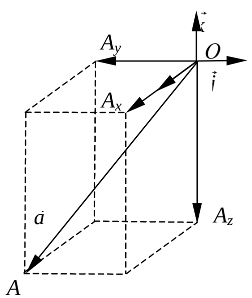


Рис. 4

Розв'язання. Запишемо розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$: $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

У точці O будуємо базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ і вектори $\overrightarrow{OA_x}=2\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_y}=-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_z}=-3\vec{k}$ (рис. 4).

На цих векторах будуємо прямокутний паралелепіпед. Тоді діагональ цього паралелепіпеда визначає вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ задано декартовими прямокутними координатами $\vec{a}(x;y;z)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, то його довжина визначається формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6}$$

Тому $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$ (лін. од.).

§3. Координати точки

Перед тим, як ввести поняття координат точки, введемо поняття радіуса-вектора точки.

Виберемо деяку точку O, яку в подальшому будемо вважати початком координат. Нехай M – довільна точка. Поставимо у відповідність цій точці вектор $\overrightarrow{OM}$. Він називається радіусом-вектором точки M відносно точки O.

Навпаки, якщо задано деякий вектор $\vec{a}$, то відклавши його від точки O, отримаємо точку A – кінець вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. Вектор $\vec{a}$, відкладений від точки O, є радіусом-вектором точки A.

Отже, при вибраній точці O кожній точці M відповідає її радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Справедливе і обернене: при вибраній точці O кожному вектору відповідає точка, радіусом-вектором якої він є. Радіус-вектор точки M позначатимемо $\vec{r}_M$.

Ввівши поняття радіуси-вектора точки, координати точки M означимо як координати її радіуса-вектора, тобто вектора $\overrightarrow{OM}$.

На перший погляд здається, що поняття координат вектора і точки тотожні. Але це не так. Для визначення координат вектора немає значення положення точки O – початку координат, в той час як координати точки (координати її радіуса-вектора) суттєво залежать від розташування початку координат O. Щоб підкреслити цей факт, короткий запис того, що точка M має координати x, y, z у вказаній системі координат, будемо робити так:

$$M\left(x;y;z\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

(порівняйте з записом координат вектора).

§4. Координатний метод розв'язування деяких геометричних задач

У цьому параграфі ми розв'яжемо деякі задачі, використовуючи координатний метод. Перед тим, як перейти до розгляду задач, введемо важливе поняття лінійної комбінації заданої системи векторів.

Нехай задано систему векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m. \tag{1}$$

<u>Означення 1</u>. Вектор $\vec{b}$ називається лінійною комбінацією заданої системи векторів (1), якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, що виконується рівність

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m. \tag{2}$$

Задача 1. Нехай систему векторів (1) задано координатами векторів у деякому базисі $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\vec{a}_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\ \vec{a}_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\ldots,\ \vec{a}_m\left(x_m;y_m;z_m\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \qquad (1')$$

Які координати у цьому базисі має вектор $\vec{b}$, що визначається рівністю (2)? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. Перша (друга, третя) координата лінійної комбінації системи векторів (1) дорівнює такій же лінійній комбінації перших (других, третіх) координат даної системи векторів (1).

Доведення. Запишемо розклади векторів системи (1') у базисі $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\\ \vec{a}_2 &= x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\\ &\vdots\\ \vec{a}_m &= x_m\vec{i}+y_m\vec{j}+z_m\vec{k}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Помножимо першу рівність системи (3) на λ_1, другу – на $\lambda_2,\ldots$, m-ту рівність – на λ_m, а потім почленно додамо ці рівності. В результаті будемо мати

$$\begin{aligned}\vec{b} = \left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_mx_m\right)\vec{i}+\left(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_my_m\right)\vec{j}+\\ +\left(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\ldots+\lambda_mz_m\right)\vec{k}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Рівність (4) є розкладом вектора $\vec{b}$ за базисними векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, а коефіцієнти цього розкладу – відповідними координатами вектора $\vec{b}$ у цьому базисі. Теорему доведено.

З використанням теореми 1 знайдемо координати алгебраїчної суми двох векторів і добутку вектора на число.

Нехай задано вектори

$$\vec{a}_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}};\ \vec{a}_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}.$$

Тоді вектор $\vec{b}=\vec{a}_1\pm\vec{a}_2$ $\left(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\pm1\right)$ за теоремою 1 має координати

$$\vec{b}\left(x_1\pm x_2;\ y_1\pm y_2;\ z_1\pm z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}, \qquad (5)$$

а вектор $\tau\vec{a}$ координати

$$\tau\vec{a}\left(\tau x_1,\ \tau y_1;\ \tau z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \qquad (6)$$

Задача 2. За заданими координатами точок $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ і $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$ знайти координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ та його довжину.

Розв'язання. Оскільки координати точок M_1 і M_2 є координатами їх радіус-векторів, то вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ мають координати

$$\overrightarrow{OM_1}\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}},\quad \overrightarrow{OM_2}\left(x_2;\ y_2;\ z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \tag{7}$$

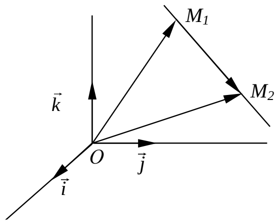


Рис. 1

Тоді (див. рис. 1)

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}.$$

Використовуючи формулу (5), отримуємо

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \tag{8}$$

Отже, координати вектора, заданого координатами своїх кінців, дорівнюють різниці координат кінця і початку вектора.

Згідно з формулою (6) §2 маємо

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}. \tag{9}$$

Задача 3. Ділення відрізка у заданому відношенні.

<u>**Означення 2**</u>. Точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ, якщо виконується рівність

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}. \tag{10}$$

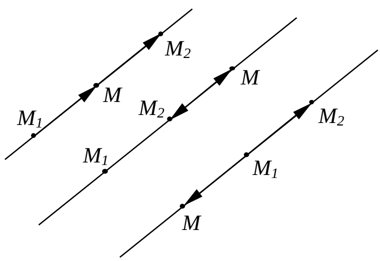
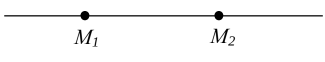


Рис. 2

Легко переконатися, що λ є додатним числом лише для внутрішніх точок відрізка M_1M_2 (див. рис. 2). При цьому λ може приймати довільні значення, які з наближенням точки M до точки M_2 необмежено збільшуються. Точці M_1 відповідає $\lambda=0$, а точці M_2 не відповідає жодне значення λ.

Аналогічні міркування можна провести для випадку, коли точка M не належить відрізку M_1M_2. Схематично результати цих міркувань можна подати у вигляді

$$-1<\lambda\le 0\qquad 0\le\lambda<\infty\qquad -\infty<\lambda<-1$$



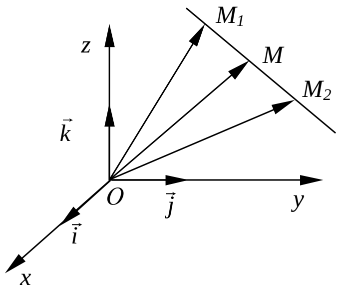


Рис. 3

Розв'яжемо таку **задачу**: для даного числа λ знайти точку M, яка ділить заданий напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ у відношенні λ.

Розв'яжемо цю задачу векторно-алгебраїчним методом. Нехай радіуси-вектори точок M_1, M_2 і шуканої точки M дорівнюють відповідно $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM}$ (рис. 3). Тоді

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}\ . \tag{11}$$

Підставляючи рівність (11) в рівність (10), отримуємо

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda\overrightarrow{OM_2} - \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\left(1+\lambda\right) = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Перейдемо від векторного запису формули (12) до координатного. Нехай точки M_1 і M_2 задано координатами $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, а шукана точка M має координати $M\left(x;y;z\right)_{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Рівність (12) можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}\ . \tag{13}$$

Оскільки координати точок M_1, M_2 і M є відповідно координатами векторів $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ і $\overrightarrow{OM}$, то згідно з теоремою 1 (вектор $\overrightarrow{OM}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ з коефіцієнтами цієї комбінації відповідно $\frac{1}{1+\lambda}$, $\frac{\lambda}{1+\lambda}$) маємо

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+\lambda}x_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}x_2 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y &= \frac{1}{1+\lambda}y_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}y_2 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \\ z &= \frac{1}{1+\lambda}z_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}z_2 = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \end{aligned} \tag{14}$$

Як наслідок формул (14), знайдемо координати середини відрізка M_1M_2. У цьому випадку $\lambda = 1$ і формули (14) приймають вигляд

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (15)$$

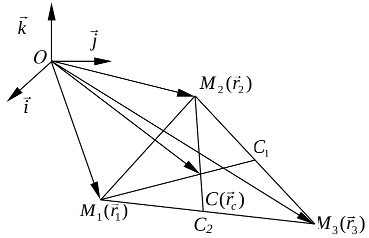


Рис. 4

Доведемо за допомогою отриманої формули (12) добре відому з елементарної геометрії теорему про те, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Позначимо через $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ радіуси-вектори вершин трикутника $M_1M_2M_3$ (рис. 4). Побудуємо точку C, радіус-вектор $\vec{r}_c$ якої є середнім арифметичним векторів $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}. \qquad (16)$$

Вираз для $\vec{r}_c$ перепишемо у такому вигляді:

$$\overrightarrow{r_c} = \frac{\vec{r}_1 + 2\dfrac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2}}{1+2} = \frac{\vec{r}_1 + 2\vec{r}_{c_1}}{1+2},$$

де $\vec{r}_{c_1}$ є радіусом-вектором точки C_1, яка ділить відрізок M_2M_3 навпіл. Згідно з формулою (12) отриманий вираз для $\vec{r}_c$ показує, що $\overrightarrow{M_1C} = \lambda\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{CC_1}$, тобто точка C належить медіані $\overrightarrow{M_1C_1}$ і ділить її у відношенні 2:1 від вершини трикутника.

Перепишемо тепер вираз $\vec{r}_c$ в іншому вигляді:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_2 + 2\dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2}}{1+2} = \frac{\vec{r}_2 + 2\vec{r}_{c_2}}{1+2}.$$

З останнього виразу можна зробити висновок, що точка C належить медіані M_2C_2 і ділить її у відношенні 2:1. Аналогічно, можна переконатися, що точка C належить і третій медіані трикутника. Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці і відсікають одна від одної одну третину довжини, рахуючи від основи.

Означення 3. Точка C, яка визначається формулою (16), називається центроїдом трикутника.

Якщо вершини трикутника $M_1M_2M_3$ задано координатами $M_1(x_1;y_1)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, $M_2(x_2;y_2)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, $M_3(x_3;y_3)_{O,\vec{i},\vec{j}}$, то центроїд трикутника визначається формулою

$$C\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)_{O,\vec{i},\vec{j}}$$

Задача 4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Знайти необхідні і достатні умови колінеарності цих векторів, виражені в координатах.

Розв'язок цієї задачі дає наступна теорема.

Теорема 2. Для того щоб вектори, які задані своїми координатами, були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб всі визначники другого порядку, які складаються з координат цих векторів, дорівнювали нулю.

Доведення. *Необхідність*. Покажемо, що для колінеарних векторів всі визначники другого порядку, які складаються з координат цих векторів, дорівнюють нулю.

Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то згідно з теоремою 2 §4 гл. IV існує таке число λ, для якого

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\,. \tag{17}$$

Тоді за теоремою 1 (див. формулу (6)) маємо

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1,\ z_2=\lambda z_1\,. \tag{18}$$

Отже,

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ \lambda x_1 & \lambda y_1\end{vmatrix}=0\,;\quad \begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ \lambda x_1 & \lambda z_1\end{vmatrix}=0\,;\quad \begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ \lambda y_1 & \lambda z_1\end{vmatrix}=0\,,$$

що і доводить необхідність умови.

Достатність. Нехай всі визначники другого порядку, які складаються з координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнюють нулю. Покажемо, що ці вектори колінеарні. За умовою:

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\,;\ \begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}=0\,;\ \begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}=0\,. \tag{19}$$

З першої рівності (19) маємо

$$x_2=\lambda x_1,\ y_2=\lambda y_1\,. \tag{20}$$

Підставляючи першу рівність (20) у другу рівність (19), отримуємо

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ \lambda x_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1\left(z_2 - \lambda z_1\right) = 0 . \tag{21}$$

Якщо $x_1 \neq 0$, то з умови (21) випливає, що

$$z_2 - \lambda z_1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1 . \tag{22}$$

Об'єднуючи рівності (20) і (22), отримуємо (18), що і доводить колінеарність векторів у випадку $x_1 \neq 0$.

Якщо ж $x_1 = 0$, то другу рівність (20) підставляємо в третю рівність (19). Отримуємо

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \lambda y_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1\left(z_2 - \lambda z_1\right) = 0 . \tag{23}$$

Якщо $y_1 \neq 0$, то знову приходимо до рівностей (18), що доводить колінеарність векторів для цього випадку.

Якщо ж $x_1 = 0$ і $y_1 = 0$, то з рівностей (20) отримуємо, що $x_2 = 0$, $y_2 = 0$. Запишемо розклад векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у базисі:

$$\vec{a} = z_1\vec{k} ,\ \vec{b} = z_2\vec{k} . \tag{24}$$

Вирази (24) показують, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні вектору $\vec{k}$, а це означає їх колінеарність. Теорему доведено.

Відмітимо плоский випадок, коли $\vec{a}\left(x_1;\, y_1\right)_{\vec{i},\vec{j}}$, $\vec{b}\left(x_2;\, y_2\right)_{\vec{i},\vec{j}}$. У цьому випадку можемо вважати, що $z_1 = z_2 = 0$. Тоді замість трьох рівностей (19) матимемо одну

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 , \tag{25}$$

яка виражає необхідну і достатню умову колінеарності двох векторів на площині в координатній формі.

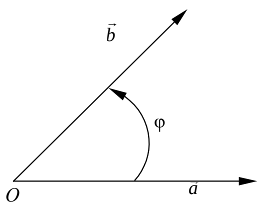


Рис. 5

Задача 5. Обчислення косинуса кута між двома векторами. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведено до спільного початку O (рис. 5).

<u>Означення 4</u>. Кутом між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будемо називати кут, на який потрібно повернути перший вектор (вектор $\vec{a}$) навколо точки O до співпадання з напрямком другого вектора (вектора $\vec{b}$), здійснюючи цей поворот проти годинникової стрілки.

Повороту за годинниковою стрілкою приписується від'ємне значення кута.

Зрозуміло, що якщо при обчисленні кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ отримано величину кута φ^0, то цей кут можна оцінити і величиною $\varphi^0 + 360^0 k$, де k – довільне ціле число.

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано координатами $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Потрібно визначити косинус кута між цими векторами.

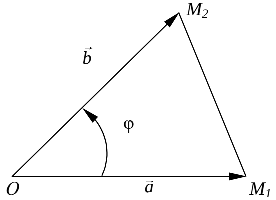


Рис. 6

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{OM_1} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OM_2} = \vec{b}$ зі спільним початком O (рис. 6). Застосуємо до трикутника OM_1M_2 теорему косинусів:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (26)$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}},$$

то його довжина визначається формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}. \qquad (27)$$

Крім того,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \qquad (28)$$

Підставляючи рівності (27), (28) в (26) отримуємо

$$\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 =$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (29)$$

Скалярний добуток. Перетворення координат

§1. Означення і властивості скалярного добутку

<u>Означення 1</u>. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Для скалярного добутку введемо позначення $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначимо через φ або $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Тоді за означенням скалярного добутку можна записати

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\vec{a}_1. \tag{1}$$

Формулу (29) §4 гл. V перепишемо у вигляді

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \tag{2}$$

де $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$, $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$.

Порівнюючи рівності (1) і (2), отримуємо формулу для обчислення скалярного добутку двох векторів, які задано своїми координатами в декартовій прямокутній системі координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3}$$

За допомогою формули (3) легко перевірити наступні властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативна властивість).

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ (асоціативна властивість відносно множення на число λ).

3) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивна властивість відносно додавання векторів).

Дійсно,

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 + (\lambda z_1)z_2 = \lambda\left(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right) = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

3) Поряд з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ з (2) розглянемо вектор $\vec{c}\left(x_3, y_3, z_3\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$. Тоді декартовими прямокутними координатами вектора $\vec{b}+\vec{c}$ будуть числа x_2+x_3, y_2+y_3, z_2+z_3. Тому

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = x_1\left(x_2+x_3\right) + y_1\left(y_2+y_3\right) + z_1\left(z_2+z_3\right) =$$

$$= \left(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right) + \left(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3\right) = = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Не варто думати, що скалярний добуток має всі формальні властивості добутку чисел. Так, наприклад, добуток двох чисел може дорівнювати нулю лише у тому випадку, коли хоча б один з множників дорівнює нулю, тоді як скалярний добуток двох векторів може дорівнювати нулю навіть у тому випадку, коли жоден з векторів-множників не дорівнює нулю: достатньо, щоб ці вектори були взаємно перпендикулярними.

Отже, умову перпендикулярності двох векторів у векторній алгебрі можна записати у вигляді алгебраїчної рівності

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \qquad (4)$$

Для чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ справедлива сполучна властивість $\lambda_1(\lambda_2\lambda_3)=(\lambda_1\lambda_2)\lambda_3$. Проте, якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – довільні вектори, то, взагалі кажучи, $\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)\neq(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$. Дійсно, якщо, наприклад, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_3$ – неколінеарні, то вектори $\vec{p}_1=(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$ і $\vec{p}_2=\vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3)$ неколінеарні (рис. 1), а тому і не рівні.

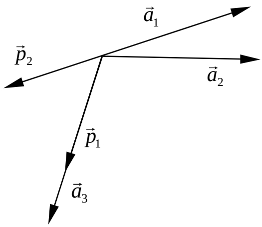


Рис. 1

Отже, якщо у виразі $(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$ опустити дужки і записати його як $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3$, то він втрачає смисл.

Знайдемо скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$, який позначимо $\vec{a}^2$. З формули (1) отримуємо

$$\vec{a}^2=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2 \iff |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (5)$$

У координатній формі формула (5) набуває вигляду

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \qquad (6)$$

§2. Проекція вектора

Нехай у просторі задано пряму MN і деякий вектор $\overrightarrow{AB}$, розміщений довільно відносно цієї прямої. Спроектуємо кінці вектора $\overrightarrow{AB}$ на пряму MN, тобто побудуємо точки A_1 і B_1 (рис. 1).

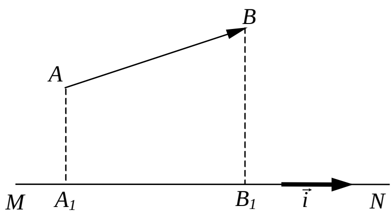


Рис. 1

Точки A_1 і B_1 є точками перетину прямої MN з площинами, проведеними відповідно через точки A і B перпендикулярно прямій MN. Відмітимо, що на відміну від плоского випадку, чотирикутник A_1ABB_1 може бути просторовим.

Нехай на прямій MN вибрано деякий напрямок, який характеризується одиничним вектором $\vec{i}$. Тоді

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\vec{i} . \tag{1}$$

Абсолютна величина числа α дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$; число $\alpha > 0$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{i}$ і $\alpha < 0$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{i}$.

Означення 1. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ називається ортогональною складовою вектора $\overrightarrow{AB}$, а число α, яке визначається співвідношенням (1), ***ортогональною проекцією*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь MN з одиничним вектором $\vec{i}$.

Виведемо формулу для обчислення ортогональної проекції вектора на вісь, яку задано одиничним вектором $\vec{i}$.

Для довільного взаємного розміщення вектора $\overrightarrow{AB}$ і прямої MN справедлива така рівність

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} . \tag{2}$$

Помножимо обидві частини рівності (2) скалярно на вектор $\vec{i}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \vec{i} + \overrightarrow{B_1B} \cdot \vec{i} . \tag{3}$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1B}$ перпендикулярні до вектора $\vec{i}$, то

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{i} = 0, \quad \overrightarrow{B_1B} \cdot \vec{i} = 0 . \tag{4}$$

Крім того, згідно з рівністю (1) маємо

$$\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \vec{i} = \alpha\vec{i} \cdot \vec{i} = \alpha . \tag{5}$$

Підставивши рівності (4) і (5) в (3), отримуємо

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = \alpha . \tag{6}$$

Ортогональну проекцію α вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь з одиничним вектором $\vec{i}$ будемо позначати так: $\alpha = \text{пр}_{\vec{i}}\overrightarrow{AB}$. Тоді формула (6) приймає вигляд

$$\text{пр}_{\vec{i}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} . \tag{7}$$

Формула (7) є шуканою формулою для обчислення проекції вектора на вісь, яку задано одиничним вектором $\vec{i}$.

Теорема 1. Ортогональна проекція суми декількох векторів на деяку вісь дорівнює сумі ортогональних проекцій цих векторів на ту ж вісь.

<u>*Доведення*</u>. Дійсно,

$$\begin{aligned}&\text{пр}_{\vec{i}}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n\right)=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n\right)\cdot\vec{i}=\vec{a}_1\cdot\vec{i}+\vec{a}_2\cdot\vec{i}+\ldots+\vec{a}_n\cdot\vec{i}=\\&=\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_1+\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_2+\ldots+\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}_n.\end{aligned}\tag{8}$$

§3. Геометричний зміст декартових прямокутних координат

Нехай задано вектор $\vec{a}\left(x;\,y;\,z\right)_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$. Запишемо його розклад у базисі $\left\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\right\}$:

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\,.\tag{1}$$

Помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{i}$ і врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, отримуємо

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=x\;\Leftrightarrow\;x=\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}\,.\tag{2}$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (1) скалярно на вектор $\vec{j}$, а потім скалярно на вектор $\vec{k}$, будемо мати

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{j}=y\;\Leftrightarrow\;y=\text{пр}_{\vec{j}}\vec{a},\\&\vec{a}\cdot\vec{k}=z\;\Leftrightarrow\;z=\text{пр}_{\vec{k}}\vec{a}\,.\end{aligned}\tag{3}$$

Отже, декартові прямокутні координати вектора є ортогональними проекціями цього вектора на координатні осі. Тому розклад вектора $\vec{a}$ у базисі $\left\{\vec{i};\,\vec{j};\,\vec{k}\right\}$ (формулу (1)) можна подати у вигляді

$$\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}+\left(\vec{a}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}+\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}\,.\tag{4}$$

Відмітимо також, що формули (2) і (3) можна записати ще так:

$$x=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right),\;y=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right),\;z=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right),\tag{5}$$

де $\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{j},\vec{a}}\right)$, $\left(\widehat{\vec{k},\vec{a}}\right)$ – кути між базисними векторами $\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}$ і вектором $\vec{a}$.

Дійсно, наприклад, $x=\vec{a}\cdot\vec{i}=|\vec{a}||\vec{i}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)=|\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{a}}\right)$.

Напрям вектора $\vec{a}$ повністю характеризується одиничним вектором

$\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Координати цього вектора отримуються з координат вектора $\vec{a}$ діленням на $|\vec{a}|$. Тому, використовуючи формули (5), для координат одиничного вектора можна записати

$$\vec{a}_0\left(\cos\left(\vec{i},\hat{\ }\vec{a}\right);\cos\left(\vec{j},\hat{\ }\vec{a}\right);\cos\left(\vec{k},\hat{\ }\vec{a}\right)\right)_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}. \qquad (6)$$

<u>Означення 1</u>. Косинуси трьох кутів з (6), утворених координатними осями декартової прямокутної системи координат з вектором $\vec{a}$, називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Отже, напрям довільного вектора $\vec{a}$ повністю визначається напрямними косинусами цього вектора.

Оскільки $|\vec{a}_0|^2=1$, то згідно з формулою (6) §1 маємо

$$\cos^2\left(\vec{i},\hat{\ }\vec{a}\right)+\cos^2\left(\vec{j},\hat{\ }\vec{a}\right)+\cos^2\left(\vec{k},\hat{\ }\vec{a}\right)=1. \qquad (7)$$

Введена нами операція скалярного добутку двох векторів дозволяє проводити виклад геометричних фактів на мові алгебри. Покажемо це на конкретних задачах.

<u>Задача 1</u>. Довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

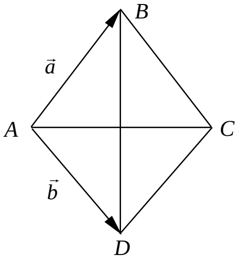


Рис. 1

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (рис. 1). За умовою $\vec{a}^2=\vec{b}^2$. Для діагоналей ромба можна записати $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}=$ $=\vec{b}^2-\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2-\vec{a}^2=0$. Остання рівність означає, що вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ взаємно перпендикулярні.

<u>Задача 2</u>. Довести, що висоти довільного трикутника перетинаються в одній точці.

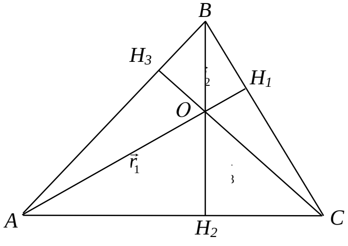


Рис. 2

Розв'язання. Нехай ABC – довільний трикутник (рис. 2). Точка O – точка перетину двох висот AH_1 і BH_2. Якщо позначити вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ відповідно через $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, то

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \vec{r}_1\cdot\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)=0,$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \vec{r}_2\cdot\left(\vec{r}_1-\vec{r}_3\right)=0.$$

Скористаємось тотожністю $\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\cdot\vec{r}_3+\left(\vec{r}_3-\vec{r}_2\right)\cdot\vec{r}_1+\left(\vec{r}_1-\vec{r}_3\right)\cdot\vec{r}_2=0$, в справедливості якої легко переконатись, якщо розкрити дужки. Враховуючи попередні співвідношення, отримуємо: $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{r}_3=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$. Звідси випливає, що і третя висота проходить через точку O.

Задача 3. Знайти кути між протилежними ребрами M_1M_2 і M_3M_4 правильної трикутної піраміди, тобто піраміди, у якої довжини всіх ребер однакові (рис. 3).

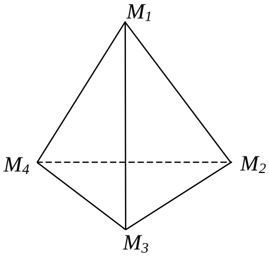


Рис. 3

Розв'язання.

$$\cos\left(\overrightarrow{M_1M_2},\widehat{\ }\overrightarrow{M_3M_4}\right)=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_3M_4}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|}.$$

Оскільки $\overrightarrow{M_3M_4}=\overrightarrow{M_1M_4}-\overrightarrow{M_1M_3}$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_3M_4}=\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{M_1M_4}-\overrightarrow{M_1M_3}\right)=$$

$$=\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_4}-\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=$$

$$=l^2\cos 60^\circ-l^2\cos 60^\circ=0.$$

Отже, протилежні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні.

§4. Перетворення координат векторів у довільних базисах

Вибір вдалої координатної системи відіграє в геометрії надзвичайно важливу роль, оскільки розв'язування задачі в такій системі суттєво спрощується.

Принципове значення має задача про знаходження координат вектора у даному базисі за його координатами в іншому базисі.

Нехай у просторі задано базис $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$, який назвемо старим. Нехай також задано новий базис $\{\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\}$. При цьому положення нового базису відносно старого повинно бути відомим, а саме, повинні бути заданими координати нових базисних векторів $\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'$ у старому базисі:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}'(a_{11};a_{12};a_{13})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{u}'=a_{11}\vec{u}+a_{12}\vec{v}+a_{13}\vec{w}\\ \vec{v}'(a_{21};a_{22};a_{23})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{v}'=a_{21}\vec{u}+a_{22}\vec{v}+a_{23}\vec{w}\\ \vec{w}'(a_{31};a_{32};a_{33})_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}} \Leftrightarrow \vec{w}'=a_{31}\vec{u}+a_{32}\vec{v}+a_{33}\vec{w}\end{array}\right\}. \quad (1)$$

У базисі $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ вектор $\vec{a}$ має старі координати $\vec{a}(\alpha;\beta;\gamma)_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$. Для нових координат вектора введемо позначення $\vec{a}(\alpha';\beta';\gamma')_{\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'}$. Знайдемо залежність між старими та новими координатами вектора $\vec{a}$. Для цього запишемо розклад вектора $\vec{a}$ як у старому, так і в новому базисах:

$$\vec{a}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}, \quad (2)$$

$$\vec{a}=\alpha'\vec{u}'+\beta'\vec{v}'+\gamma'\vec{w}' \;. \tag{3}$$

Підставивши в (3) вирази (1), отримуємо

$$\vec{a}=\alpha'\left(a_{11}\vec{u}+a_{12}\vec{v}+a_{13}\vec{w}\right)+\beta'\left(a_{21}\vec{u}+a_{22}\vec{v}+a_{23}\vec{w}\right)+\gamma'\left(a_{31}\vec{u}+a_{32}\vec{v}+a_{33}\vec{w}\right)=$$
$$=\left(a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma'\right)\vec{u}+\left(a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma'\right)\vec{v}+\left(a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma'\right)\vec{w}.$$

Через єдиність розкладу вектора за базисними векторами коефіцієнти при векторах $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ повинні дорівнювати старим координатам α, β, γ вектора $\vec{a}$, тобто

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma' \\ \beta &= a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma' \\ \gamma &= a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma' \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

<u>Означення 1</u>. Формули (4) називаються формулами переходу від старої системи координат до нової.

Розглянемо матриці

$$T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};\; X=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};\; X'=\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}. \tag{5}$$

У матричній формі співвідношення (4) приймають вигляд

$$X=TX' . \tag{6}$$

Відмітимо, що в першому стовпці матриці T стоять координати нового базисного вектора $\vec{u}'$ відносно старого базису, в другому – координати вектора $\vec{v}'$, в третьому – координати вектора $\vec{w}'$.

<u>Означення 2</u>. Матриця T називається матрицею переходу від старого базису до нового.

Оскільки вектори $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ некомпланарні, то $\det T \neq 0$ (рекомендується довести це самостійно). Тому існує обернена матриця T^{-1} до матриці T. Помноживши рівність (6) зліва на матрицю T^{-1}, отримуємо матричну форму співвідношень, що виражають нові координати через старі

$$T^{-1}X=T^{-1}TX' \;\Leftrightarrow\; T^{-1}X=EX' \;\Leftrightarrow\; X'=T^{-1}X \;. \tag{7}$$

Розглянемо у просторі три базиси:

$$\text{I: } \{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\},\ \text{II: } \{\vec{u}'; \vec{v}'; \vec{w}'\},\ \text{III. } \{\vec{u}''; \vec{v}''; \vec{w}''\}.$$

Нехай матриця T – матриця переходу від базису I до базису II, T_1 – матриця переходу від базису II до базису III, T_2 – матриця переходу від базису I до базису III.

Теорема 1. Для матриці переходу від базису I до базису III справедливі співвідношення

$$T_2 = TT_1, \quad \det T_2 = \det T \det T_1 . \tag{8}$$

Доведення. Координати вектора $\vec{a}$ відповідно в I, II, III базисах запишемо у вигляді матриць-стовпців

$$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}; \; X' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}; \; X'' = \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (6) маємо

$$X = TX', \; X' = T_1X'', \; X = T_2X''. \tag{9}$$

З перших двох рівностей (9) отримуємо

$$X = TT_1X''. \tag{10}$$

Оскільки третя рівність (9) і рівність (10) справедливі для довільного вектора X'', то порівнюючи ці рівності, приходимо до першої формули (8). Стосовно другої формули (8) див. доведення теореми 2 §7 гл. II.

§5. Перетворення координат точки

У §4 мова йшла про перетворення координат вектора. Координати вектора не залежать від вибору початку координат. Тому, розглядаючи перетворення координат вектора при переході від однієї системи координат до іншої, можна вважати, що початки цих систем координат співпадають.

Перейдемо тепер до перетворення координат точки. На відміну від §4, положення початків координатних систем у цьому випадку має суттєве значення. Нехай у просторі задано стару $\{O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ та нову $\{O'; \vec{u}'; \vec{v}'; \vec{w}'\}$ системи координат і нехай положення нової системи відносно старої відоме: $O'(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0)_{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$, $\vec{u}'(a_{11}; a_{12}; a_{13})_{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$, $\vec{v}'(a_{21}; a_{22}; a_{23})_{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$, $\vec{w}'(a_{31}; a_{32}; a_{33})_{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}$.

Розглянемо в цих системах координат точку M (рис. 1) з координатами

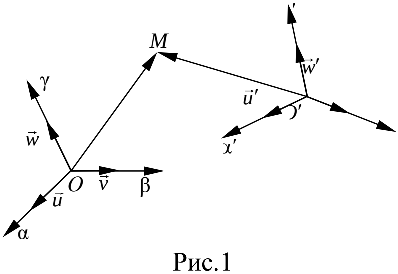


Рис.1

$M\left(\alpha;\beta;\gamma\right)_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$, $M\left(\alpha';\beta';\gamma'\right)_{O',\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}'}$. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}$ має координати α,β,γ у старій координатній системі $\left\{O;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right\}$, а вектор $\overrightarrow{O'M}$ – координати α',β',γ' у новій системі $\left\{O';\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\right\}$. Незалежно від взаємного розміщення точок O, O', M справедлива векторна рівність

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+a\\ \beta&=\beta_0+b\\ \gamma&=\gamma_0+c\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{O'M}\left(a;b;c\right)_{O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}}$ – старі координати вектора $\overrightarrow{O'M}$. Новими координатами цього вектора є координати точки M відносно нового базису $\left\{O';\vec{u}';\vec{v}';\vec{w}'\right\}$.

Використовуючи формули (4) §4, отримуємо

$$\left.\begin{aligned}a&=a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma'\\ b&=a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma'\\ c&=a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma'\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Підставимо (2) в рівності (1):

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\alpha_0+a_{11}\alpha'+a_{21}\beta'+a_{31}\gamma'\\ \beta&=\beta_0+a_{12}\alpha'+a_{22}\beta'+a_{32}\gamma'\\ \gamma&=\gamma_0+a_{13}\alpha'+a_{23}\beta'+a_{33}\gamma'\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Формули (3) виражають старі координати точки через нові.

Розглянемо матриці

$$X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix};\ X_0=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\\ \gamma_0\end{pmatrix};\ X'=\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix};\ T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\ a_{12}&a_{22}&a_{32}\\ a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матриця T є матрицею переходу від старого базису до нового. У матричних позначеннях формули (3) набувають вигляду

$$X=X_0+TX' \Leftrightarrow X-X_0=TX'. \tag{5}$$

Оскільки матриця T невироджена, то помноживши рівність (5) зліва на матрицю T^{-1}, отримуємо

$$T^{-1}\left(X-X_0\right)=T^{-1}TX' \Leftrightarrow T^{-1}X-T^{-1}X_0=EX' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X'=T^{-1}X-T^{-1}X_0. \tag{6}$$

Формула (6) виражає нові координати точки через старі.

Розглянемо окремий випадок перетворення координат, при якому змінюється лише положення початку координат, а координатні вектори залишаються незмінними, тобто $\vec{u}'=\vec{u}$, $\vec{v}'=\vec{v}$, $\vec{w}'=\vec{w}$. У цьому випадку матриця переходу від одного базису до іншого дорівнює $T=E$, де E – одинична матриця. Формула (5) приймає вигляд

$$X = X_0 + X' \tag{7}$$

або в координатній формі

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha' \\ \beta &= \beta_0 + \beta' \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma' \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Формули (8) називаються формулами паралельного перенесення системи координат.

Аналогічним способом можемо отримати формули перетворення координат на площині. Нехай на площині дано два базиси: старий $\{\vec{u};\vec{v}\}$ і новий $\{\vec{u}';\vec{v}'\}$, де

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}' &= a_{11}\vec{u} + a_{12}\vec{v} \\ \vec{v}' &= a_{21}\vec{u} + a_{22}\vec{v} \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Матрицею переходу від старого базису до нового є невироджена матриця

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Формули перетворення координат вектора $\vec{a}$ мають вигляд

$$X = TX' \Leftrightarrow X' = T^{-1}X, \tag{11}$$

де $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ і $X'=\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$ – старі і нові координати вектора $\vec{a}$. Запишемо перше матричне співвідношення (11) у координатній формі

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a_{11}\alpha' + a_{21}\beta' \\ \beta &= a_{12}\alpha' + a_{22}\beta' \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Для формул перетворення координат точки на площині маємо

$$X = X_0 + TX' \Leftrightarrow X' = T^{-1}X - T^{-1}X_0. \tag{13}$$

У випадку паралельного перенесення ($T = E$) формули (13) приймають вигляд

$$X = X_0 + X' \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_0 + \alpha' \\ \beta = \beta_0 + \beta' \end{array}\right\}, \tag{14}$$

де $X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$ – координати нового початку.

§6. Перетворення декартових прямокутних координат

Для переходу від старої декартової прямокутної системи координат $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ до нової $\{\vec{i}\,';\vec{j}\,';\vec{k}\,'\}$ скористаємось наведеними вище результатами. Проте, спочатку варто звернути увагу на деякі характерні обставини, які мають місце у цьому частинному випадку перетворення координат. А саме, врахуємо, що вектори $\vec{i}\,';\vec{j}\,';\vec{k}\,'$ є одиничними і взаємно ортогональними, так само, як і вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, тобто

$$\vec{i}\,'\cdot\vec{i}\,' = 1,\quad \vec{j}\,'\cdot\vec{j}\,' = 1,\quad \vec{k}\,'\cdot\vec{k}\,' = 1,\quad \vec{i}\,'\cdot\vec{j}\,' = 0,\quad \vec{i}\,'\cdot\vec{k}\,' = 0,\quad \vec{j}\,'\cdot\vec{k}\,' = 0. \tag{1}$$

Аналогічні співвідношення можна записати і для векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Елементи матриці переходу

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

від базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ до базису $\left\{\vec{i}\,';\vec{j}\,';\vec{k}\,'\right\}$ внаслідок співвідношень (1) зв'язані рядом залежностей. Щоб отримати ці залежності, запишемо співвідношення (1) у координатній формі, пригадавши, що елементи першого, другого та третього стовпців матриці T є координатами відповідно векторів $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ і $\vec{k}\,'$ у старому базисі $\left\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right\}$:

$$\begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0. \end{array} \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

або

$$T^T T = E, \tag{4}$$

де T^T – транспонована матриця до матриці T. З рівності (4) випливає, що

$$T^{-1} = T^T. \tag{5}$$

<u>Означення 1</u>. Матриця T, для якої обернена матриця співпадає з транспонованою матрицею, називається ***ортогональною***.

Легко перевірити, що для ортогональної матриці T $\det T = \pm 1$. Дійсно, з (4) маємо $\det T^T \det T = 1 \Leftrightarrow \det T \det T = 1 \Leftrightarrow (\det T)^2 = 1$.

Формули перетворення координат вектора (4) з §4 з точністю до позначень приймають вигляд (див. також формулу (4) §3)

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{i}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{i}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{i}\right)z' \\ y &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{j}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{j}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{j}\right)z' \\ z &= \left(\vec{i}\,' \cdot \vec{k}\right)x' + \left(\vec{j}\,' \cdot \vec{k}\right)y' + \left(\vec{k}\,' \cdot \vec{k}\right)z' \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

а формули, що виражають нові координати вектора через старі – вигляд (див. формулу (7) §4)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{i}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{i}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{i}\,'\right)z \\ y' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{j}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{j}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{j}\,'\right)z \\ z' &= \left(\vec{i} \cdot \vec{k}\,'\right)x + \left(\vec{j} \cdot \vec{k}\,'\right)y + \left(\vec{k} \cdot \vec{k}\,'\right)z \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Зауваження 1. Формули (6), (7) отримані нами з використанням загальної теорії перетворення координат. Проте, їх можна отримати безпосередньо шляхом наступних елементарних міркувань. У нових позначеннях базисних векторів і координат рівності (2), (3) §4 приймають вигляд

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'. \tag{8}$$

Помножимо скалярно обидві частини рівності (8) на вектор $\vec{i}$, врахувавши, що $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$. В результаті будемо мати

$$x=\left(\vec{i}\,'\cdot\vec{i}\right)x'+\left(\vec{j}\,'\cdot\vec{i}\right)y'+\left(\vec{k}\,'\cdot\vec{i}\right)z',$$

тобто першу рівність (6). Помноживши скалярно обидві частини рівності (8) послідовно на $\vec{j}$ і $\vec{k}$, отримаємо дві інші рівності (6).

У такий спосіб відразу можна отримати і формули для обчислення нових координат за відомими старими координатами, тобто формули (7). Варто лише помножити скалярно рівність (8) послідовно на $\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$.

§7. Перетворення декартових прямокутних координат на площині

Нехай на площині дано два декартових прямокутних базиси: старий $\{\vec{i};\vec{j}\}$ і новий $\{\vec{i}\,';\vec{j}\,'\}$.

<u>**Означення 1**</u>. Декартовий прямокутний базис $\left\{\vec{i};\vec{j}\right\}$ називається правим, якщо $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)=90^{\mathrm{O}}$ і лівим, якщо $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right)=-90^{\mathrm{O}}$.

Розглянемо два випадки.

I. Обидва базиси $\{\vec{i};\vec{j}\}$ і $\{\vec{i}\,';\vec{j}\,'\}$ – праві. У цьому випадку положення нового базису повністю визначається кутом повороту φ, тобто кутом на який потрібно повернути вектори $\vec{i},\vec{j}$, щоб отримати координатні вектори $\vec{i}\,',\vec{j}\,'$ (рис. 1).

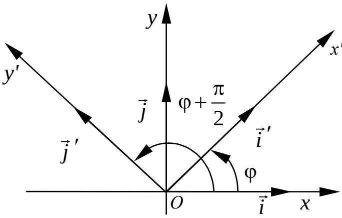


Рис. 1

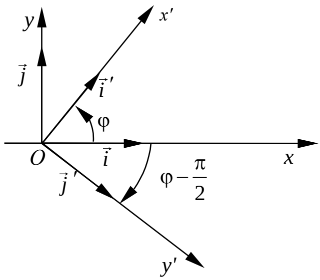


Рис. 2

Дійсно,

$$\vec{i}\,'\left(\cos\varphi;\sin\varphi\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \;\Leftrightarrow\; \vec{i}\,' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},$$
$$\vec{j}\,'\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \;\Leftrightarrow\; \vec{j}\,' = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}. \quad (1)$$

Матрицею переходу від старого базису $\{\vec{i},\,\vec{j}\}$ до нового є матриця

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \det T = 1, \quad (2)$$

а формули переходу від старої системи координат до нової приймають вигляд

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

II. Базис $\{\vec{i};\,\vec{j}\}$ – правий, а базис $\{\vec{i}\,';\,\vec{j}\,'\}$ – лівий (рис. 2). У цьому випадку

$$\vec{i}\,'\left(\cos\varphi;\sin\varphi\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \;\Leftrightarrow\; \vec{i}\,' = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},$$
$$\vec{j}\,'\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)_{\vec{i},\,\vec{j}} \;\Leftrightarrow\; \vec{j}\,' = \sin\varphi\vec{i} - \cos\varphi\vec{j}. \quad (4)$$

Матрицею переходу від старого базису до нового є матриця

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},\ \det T = -1. \quad (5)$$

Для формул перетворення координат отримуємо

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Формули, що виражають залежність старих координат точки $M\left(x;\,y\right)_{O,\vec{i},\,\vec{j}}$ від нових $M\left(x';\,y'\right)_{O',\vec{i}\,',\,\vec{j}\,'}$, приймають вигляд

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi + x_0 \\ y &= x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi + y_0 \end{aligned}\right\}, \quad (7)$$

де верхній знак відповідає розглянутому випадку **I**, а нижній – випадку **II** і $O'\left(x_0;\, y_0\right)_{O,\,\vec{i},\,\vec{j}}$. Відмітимо, що матриця переходу від базису $\{\vec{i};\, \vec{j}\}$ до базису $\{\vec{i}\,';\, \vec{j}\,'\}$ ортогональна, тобто $T^{-1} = T^{T}$, де T^{T} – транспонована матриця до матриці T. Формули, що виражають нові координати вектора $\vec{a}\left(x';\, y'\right)_{\vec{i}\,',\,\vec{j}\,'}$ через старі координати $\vec{a}\left(x;\, y\right)_{\vec{i},\,\vec{j}}$ у матричній формі приймають вигляд

$$X' = T^{T} X \,, \tag{8}$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.