Пряма у просторі

§1. Пряма як лінія перетину двох площин

Згідно з означенням 1 §3 гл. XVI лінія у просторі визначається як перетин двох поверхонь. Оскільки пряму у просторі можна розглядати як перетин двох непаралельних площин, то її у декартовій прямокутній системі координат завжди можна задати двома лінійними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

що визначають ці площини. З іншого боку, два лінійних рівняння (1) є рівняннями деякої прямої тоді і тільки тоді, коли відповідні їм площини не паралельні, тобто коли виконується одна з таких умов:

1º. Хоча б один з визначників

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

відмінний від нуля. Ця умова у векторній формі рівносильна умові $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \neq \vec{0}$. Тут $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ – нормальні вектори площин (1), а знак “$\times$” є знаком векторного добутку.

2º. Нормальні вектори $\vec{N}_1\left(A_1; B_1; C_1\right)$ і $\vec{N}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$ площин (1) неколінеарні, тобто відповідні координати цих векторів не пропорційні.

3º. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$.

<u>Означення 1</u>. Рівняння системи (1) називаються загальними рівняннями прямої, якщо виконується одна з умов **1º**, **2º**, **3º**.

Ми визначили пряму як перетин двох площин. Але через задану пряму можна провести нескінченну кількість площин, тобто пучок площин, віссю якого є дана пряма. Будь-які дві різні площини цього пучка визначають дану пряму. Отже, виявляється, що у виборі рівнянь прямої є певна довільність: кожне з рівнянь системи (1) можна замінити рівнянням (див. теорему 1 §10 гл. XVII)

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \quad \lambda, \mu \in R$$

будь-якої іншої площини пучка, відмінної від площин (1). Цією довільністю можна скористатись для зображення даної прямої як перетину площин, що мають найпростіші рівняння.

Зручно користуватись площинами, паралельними координатним осям, тобто площинами, які проектують дану пряму на координатні площини.

Рівняння таких площин не містять однієї координати і тому їх можна отримати шляхом виключення відповідної координати з рівнянь системи (1). В результаті матимемо три таких рівняння, проте для визначення прямої достатньо двох з них. Зупинимось на цьому докладніше.

Оскільки площини (1) перетинаються, то за умовою **1°** хоча б один з визначників (2) не дорівнює нулю. Нехай таким визначником є

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{3}$$

Геометрично це означає, що пряма (1) не паралельна координатній площині xOy. За умови (3) систему рівнянь (1) можна розв’язати відносно x і y:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -\left(C_1z + D_1\right) \\ A_2x + B_2y = -\left(C_2z + D_2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -\left(C_1z + D_1\right) & B_1 \\ -\left(C_2z + D_2\right) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -\left(C_1z + D_1\right) \\ A_2 & -\left(C_2z + D_2\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q, \end{cases} \tag{4}$$

де $a = \dfrac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $p = \dfrac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $b = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$; $q = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$.

Означення 2. Система рівнянь (4) називається зведеною системою рівнянь прямої.

Оскільки перше рівняння системи (4) не містить y, а друге – x, то перша площина паралельна осі Oy і проектує задану пряму на координатну площину xOz, а друга площина паралельна осі Ox і проектує задану пряму на площину yOz.

Отже, перше з рівнянь (4), тобто рівняння $x = az + p$, є одночасно рівнянням проекції даної прямої на площину xOz, а друге рівняння $y = bz + q$ – рівнянням проекції цієї прямої на площину yOz. Тому поряд з терміном зведені рівняння прямої використовується також термін рівняння прямої у проекціях на координатні площини.

Параметри p і q мають простий геометричний зміст. Якщо ми покладемо в рівняннях (4) $z = 0$, тобто будемо знаходити точку перетину прямої з площиною xOy, то ми отримаємо $x = p$, $y = q$. Тому пряма (4) перетинається з площиною xOy у точці $(p; q; 0)$. Цю точку назвемо слідом прямої на площині xOy. Отже, параметри p і q в рівняннях (4) є координатами сліду даної прямої на площині xOy.

Приклад 1. Дано пряму

$$\begin{cases} 6x + 4y + z - 26 = 0 \\ 2x + 4y - 3z - 2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Знайти зведені рівняння цієї прямої і рівняння її проекцій на координатні площини xOz і yOz. Визначити координати сліду даної прямої на площині xOy.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння прямої (5) відносно x і y. Це можна зробити, оскільки

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 - z & 4 \\ 2 + 3z & 4 \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 26 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{16} = 6 - z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 26 - z \\ 2 & 2 + 3z \end{vmatrix}}{16} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 26 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{16} = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4}z.$$

Отже, зведеними рівняннями прямої (5) є рівняння

$$\begin{cases} x = 6 - z \\ y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4}z. \end{cases} \tag{6}$$

Проекціями прямої (5) на координатні площини xOz і yOz будуть прямі, рівняння яких відповідно

$$\begin{cases} x = 6 - z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4}z \\ x = 0. \end{cases}$$

Точка $\left(6; -\dfrac{5}{2}; 0\right)$ є слідом прямої (5) на площині xOy.

Зауваження 1. Якщо $a = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = p \\ y = bz + q \end{cases}$$

лежить у площині $x = p$ і тому паралельна площині yOz.

Якщо $b = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = q \end{cases}$$

лежить у площині $y = q$ і тому паралельна площині xOz.

Якщо $a = 0$, $b = 0$, то пряма

$$\begin{cases} x = p \\ y = q \end{cases}$$

паралельна осі Oz.

Зауваження 2. Виведення рівнянь (4) ґрунтується на припущенні, що виконується умова (3). Якщо ця умова не виконується, то, принаймні, один з двох інших визначників (2) не дорівнює нулю. Тоді слід взяти той визначник, який не дорівнює нулю, і провести аналогічні викладки.

§2. Канонічні і параметричні рівняння прямої

2.1. Канонічні рівняння прямої у просторі можна отримати шляхом тих самих міркувань, що й при розв'язуванні задачі 1 §8 гл. XIII.

Пряма l у просторі однозначно визначається довільною своєю точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і деяким ненульовим вектором $\vec{a}(m; n; p)$, паралельним до l.

Означення 1. Ненульовий вектор $\vec{a}(m; n; p)$, паралельний до прямої l, називається напрямним вектором цієї прямої.

Однією з основних задач теорії прямої є така задача: маючи аналітичне задання образів, які визначають положення прямої у просторі, написати рівняння цієї прямої. Знайдемо рівняння прямої l, якщо відома точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку вона проходить, і задано напрямний вектор $\vec{a}(m; n; p)$ цієї прямої (рис. 1).

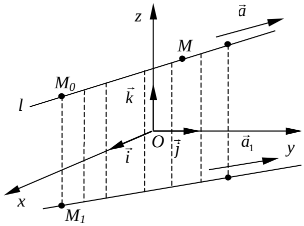

Рис. 1

Для того щоб точка $M(x;\, y;\, z)$ лежала на прямій l, яка проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, необхідно і достатньо, щоб вектор

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;\, y-y_0;\, z-z_0)$$

був колінеарним вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$, тобто необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались три рівності

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ m & n \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ n & p \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ m & p \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Кожна з цих рівностей є рівнянням першого степеня, тобто рівнянням площини. Отже, координати довільної точки M прямої l задовольняють рівнянню кожної з площин (1), а тому пряма l належить одночасно до всіх цих площин. Іншими словами, три площини (1) є площинами одного і того ж пучка з віссю l.

Вияснимо геометричний зміст кожного з рівнянь (1). Нехай, наприклад, у першому з цих рівнянь m і n одночасно не дорівнюють нулю. Тоді це рівняння приймає вигляд

$$n(x-x_0) - m(y-y_0) = 0. \qquad (2)$$

Оскільки в рівнянні (2) відсутня змінна z, то цим рівнянням визначається площина, паралельна осі Oz або така, що містить цю вісь. Пряма l лежить у площині (2), тому остання проектує пряму l на координатну площину xOy. Проекція прямої l на площину xOy має рівняння

$$\begin{cases} n(x-x_0) - m(y-y_0) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

і проходить через точку $M_1(x_0;\, y_0;\, 0)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m;\, n;\, 0)$ (рис. 1).

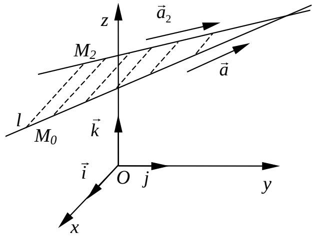

Рис. 2

Друга з площин (1)

$$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ n & p \end{vmatrix} = 0$$

паралельна осі Ox і перетинає площину yOz по прямій, що проходить через точку $M_2(0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(0;\, n;\, p)$ (рис. 2).

І нарешті, третя площина

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ m & p \end{vmatrix} = 0$$

паралельна осі Oy і перетинає площину xOz по прямій, що проходить через точку $M_3(x_0;\, 0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}_3(m;\, 0;\, p)$.

Розглянемо спочатку випадок, коли жодне з чисел m, n, p не дорівнює нулю. Тоді рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}; \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}; \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}. \tag{3}$$

Із системи рівнянь (3) випливає, що будь-яке з цих рівнянь є наслідком двох інших. Тому два з трьох рівнянь (1) або (3) повністю визначають пряму l, що проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$.

У випадку $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$ рівняння (1) або (3) можна подати ще так:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \tag{4}$$

<u>Означення 2</u>. Рівняння (4) називаються канонічними рівняннями прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$.

Розглянемо тепер випадок, коли одне з чисел m, n, p дорівнює нулю, тобто пряма l паралельна одній з координатних площин. Нехай для визначеності $m = 0$, а $n \neq 0$ і $p \neq 0$. Тоді рівняння (1) перепишуться у вигляді

$$x - x_0 = 0; \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}; \quad x - x_0 = 0.$$

Отже, для двох рівнянь, що визначають пряму l, маємо

$$x = x_0; \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \tag{5}$$

Домовимось у цьому випадку канонічні рівняння записувати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \tag{6}$$

вважаючи чисельник першого дробу рівним нулю, тобто домовляємось розглядати систему рівнянь (6) як систему двох рівнянь (5).

Якщо одночасно дорівнюють нулю два числа з чисел m, n, p, то пряма l паралельна одній з координатних осей. Нехай для визначеності $m=0$, $n=0$. У цьому випадку система рівнянь (1) набуває вигляду

$$0=0; \quad y-y_0=0; \quad x-x_0=0.$$

Ця система визначає дві площини

$$x=x_0; \quad y=y_0, \tag{7}$$

перетином яких є пряма l, паралельна координатній осі Oz.

Домовляємось канонічні рівняння прямої l і в цьому випадку записувати у вигляді

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{8}$$

де чисельники першого та другого дробів вважаються рівними нулю. Систему рівнянь (8) будемо розглядати як систему рівнянь (7).

Отже, канонічні рівняння (4) слід розуміти так:

1º. Якщо жодне з чисел m, n, p не дорівнює нулю, то рівняння (4) потрібно розуміти як систему будь-яких двох рівнянь з трьох рівнянь системи (1).

2º. Якщо яке-небудь з чисел m, n, p дорівнює нулю, то чисельник відповідного дробу в (4) потрібно покласти рівним нулю. Так, якщо $p=0$, то систему (4) слід розуміти як систему двох рівнянь

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}; \quad z=z_0.$$

3º. Якщо які-небудь два числа з чисел m, n, p дорівнюють нулю, то чисельники двох відповідних дробів потрібно покласти рівними нулю. Якщо, наприклад, $n=0$ і $p=0$, то систему (4) слід розуміти як систему двох рівнянь

$$y-y_0=0; \quad z-z_0=0.$$

Не дивлячись на небажаний запис нуля у знаменнику і необхідність обмовок з цього приводу, зображення прямої у вигляді канонічних рівнянь (4), (6), (8) тощо є досить поширеним. Причиною цього є те, що канонічні рівняння відразу ж вказують на напрямний вектор прямої і точку, через яку вона проходить.

Зауваження 1. Якщо вектор $\vec{a}(m; n; p)$ – напрямний вектор прямої (1), то і вектор $\lambda\vec{a}$, де λ - будь-яке ненульове дійсне число, також є напрямним вектором цієї прямої. Пронормуємо вектор $\vec{a}$, тобто покладемо $\lambda=\frac{1}{|\vec{a}|}$. Тоді напрямним вектором прямої (1) буде одиничний вектор $\vec{a}_0$, координатами якого є напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{a}_0(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

де

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \ \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \ \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (9)$$

і

$$\alpha = \left(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}\right), \ \beta = \left(\widehat{\vec{j}, \vec{a}}\right), \ \gamma = \left(\widehat{\vec{k}, \vec{a}}\right).$$

Канонічні рівняння прямої у цьому випадку приймають вигляд

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}. \qquad (10)$$

Формули (9) дають можливість знайти кути прямої (1) з осями координат.

2.2. Нехай задано дві різні точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Складемо рівняння прямої M_1M_2.

Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ є напрямним вектором цієї прямої. Підставимо у рівняння (4) замість координат точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ координати точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, а замість координат вектора $\vec{a}(m; n; p)$ координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. В результаті матимемо канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (11)$$

2.3. Перейдемо до параметричного задання прямої у просторі, тобто зображення координат змінної точки прямої як функцій довільного параметра.

Нехай пряму l задано точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{a}(m; n; p)$ (рис. 3).

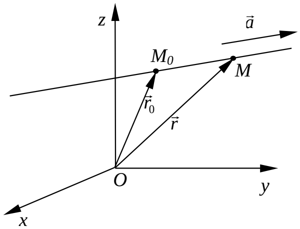

Рис. 3

Позначимо через $M(x;\, y;\, z)$ довільну точку простору. Точка $M(x;\, y;\, z)$ лежить на прямій l тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ колінеарні. Отже, для будь-якої точки M прямої l має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{a}t\,. \qquad (12)$$

Запишемо її у координатній формі:

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases} \qquad (13)$$

Рівняння (13) є параметричними рівняннями прямої. Якщо параметр t пробігає всю множину дійсних чисел, точка $M(x;\, y;\, z)$ пробігає всю пряму.

Нехай пряма проходить через дві різні точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Тоді параметричними рівняннями цієї прямої будуть рівняння

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \end{cases} \qquad (14)$$

Параметру $t = 0$ відповідає точка $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, а параметру $t = 1$ – точка $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Якщо параметр t змінюється у проміжку $0 \le t \le 1$, то цим значенням параметра відповідають точки відрізка M_1M_2 даної прямої.

2.4. Запишемо векторне рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\, n;\, p)$. Для цього позначимо через $\vec{r}$ і $\vec{r}_0$ радіуси-вектори відповідно точок M і M_0 прямої l (рис. 3). Тоді рівність (12) у векторній формі набуває вигляду

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t\,. \qquad (15)$$

Рівняння (15) і є шуканим рівнянням прямої l у векторній формі. Відмітимо, що записуючи рівняння (15) у координатній формі, прийдемо до параметричних рівнянь прямої (13).

При виведенні рівнянь прямої ми записували умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$ у вигляді рівності (12). Проте цю умову можна було б записати і в іншій формі, а саме, прирівняти до нуля векторний добуток векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{a}$:

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\times\vec{a}=\vec{0}. \tag{16}$$

Рівняння (16) слід також розглядати як векторне рівняння прямої, яке, на відміну від рівняння (15), не є параметричним. Рівняння (16) можна отримати безпосередньо з рівняння (15), помноживши його векторно на $\vec{a}$:

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{a}t \Leftrightarrow \left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\times\vec{a}=\left(\vec{a}t\right)\times\vec{a} \Leftrightarrow \left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\times\vec{a}=\vec{0}.$$

Щоб записати рівняння (16) у координатній формі, виразимо векторний добуток у вигляді визначника

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=\vec{0}$$

і розкладемо цей визначник за елементами першого рядка, врахувавши, що вектор дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли всі його координати дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} p\left(y-y_0\right)&=n\left(z-z_0\right),\\ m\left(z-z_0\right)&=p\left(x-x_0\right),\\ n\left(x-x_0\right)&=m\left(y-y_0\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Поділивши перше з рівнянь (17) на pn, друге – на mp і третє – на mn, зведемо їх до вигляду

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Отже, у векторній формі канонічні рівняння прямої мають вигляд(16).

§3. Зведення загальних рівнянь прямої до канонічних рівнянь

3.1. Нехай пряму l задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

Позначимо площини, які визначаються рівняннями (1), через α_1 і α_2, а нормальні вектори цих площин – через

$$\vec{N}_1\left(A_1;B_1;C_1\right) \text{ і } \vec{N}_2\left(A_2;B_2;C_2\right).$$

Теорема 1. Вектор $\vec{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, тобто вектор з координатами

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right) \tag{2}$$

є напрямним вектором прямої (1).

Доведення. Вектор $\vec{N}_1$ перпендикулярний до площини α_1, тому деякий вектор $\vec{a}$, перпендикулярний до вектора $\vec{N}_1$, буде паралельним до площини α_1 (рис. 1). Аналогічно, вектор, перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}_2$ площини α_2, буде паралельним до цієї площини. Отже, вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, є паралельним як до площини α_1, так і до площини α_2, а тому і до лінії перетину цих площин, тобто прямої (1).

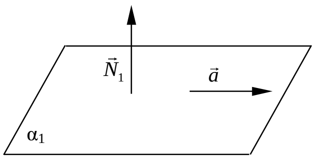

Рис. 1

Ми показали, що за напрямний вектор прямої (1) можна взяти будь-який вектор, який одночасно перпендикулярний до нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Зокрема, таким вектором є векторний добуток $\vec{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$. Координати цього векторного добутку визначаються згідно з (2) (див. §2 гл. VII).

Теорему доведено.

Щоб перейти від загальних рівнянь прямої (1) до канонічних рівнянь цієї прямої, потрібно знайти:

1) хоча б одну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої (1);

2) деякий напрямний вектор $\vec{a}$ прямої (1).

Покажемо, як знайти координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, через яку проходить пряма (1). Оскільки вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ неколінеарні, то вектор $\vec{a}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ відмінний від нульового вектора. Тому хоча б одна з координат вектора $\vec{a}$ не дорівнює нулю. Нехай для визначеності

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0 .$$

Систему (1) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1z-D_1 \\ A_2x+B_2y=-C_2z-D_2. \end{cases} \tag{3}$$

Поклавши z рівним якому-небудь числу, наприклад, нулю, знаходимо з системи (3) значення x і y:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \qquad (4)$$

Знаючи точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, 0\right)$ і напрямний вектор (2) $\vec{a}$, запишемо канонічні рівняння прямої у вигляді

$$\frac{x - \dfrac{B_1 D_2 - B_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}}{B_1 C_2 - B_2 C_1} = \frac{y - \dfrac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}}{C_1 A_2 - C_2 A_1} = \frac{z}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \qquad (5)$$

3.2. У §1 даної глави було показано, як із загальних рівнянь (1) прямої l отримати її зведені рівняння

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q. \end{cases} \qquad (6)$$

Нехай тепер пряму l задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \qquad (7)$$

Ця пряма визначається як лінія перетину площин

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a_1}{a_3} z + x_0 - \dfrac{a_1}{a_3} z_0 \\ y = \dfrac{a_2}{a_3} z + y_0 - \dfrac{a_2}{a_3} z_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Ввівши позначення

$$a = \frac{a_1}{a_3}; \quad b = \frac{a_2}{a_3}; \quad p = x_0 - \frac{a_1}{a_3} z_0; \quad q = y_0 - \frac{a_2}{a_3} z_0,$$

ми від системи (8) перейдемо до системи (6), тобто до зведених рівнянь прямої l.

Оскільки напрямний вектор $\vec{a}\left(a_1; a_2; a_3\right)$ прямої l можна замінити будь-яким іншим вектором, йому паралельним, то з цього випливає, що за умови $a_3 \neq 0$ вектор з координатами

$$\left(a = \frac{a_1}{a_3};\, b = \frac{a_2}{a_3};\, 1\right)$$

є напрямним вектором прямої l. Крім цього, з (6) випливає, що пряма l проходить через точку $M_0\left(p;\, q;\, 0\right)$. Тому, якщо пряму l задано зведеними рівняннями (6), то з цих рівнянь легко отримати її канонічні рівняння

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z}{1}\,. \tag{9}$$

Канонічні рівняння (9) прямої l розкривають геометричний зміст коефіцієнтів a і b, які фігурують у зведених рівняннях (6) цієї прямої.

Приклад 1. Пряму задано загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0. \end{cases}$$

Записати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо координати точки M_0 прямої. Оскільки

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0\,,$$

то поклавши $z = 0$, з системи (4) знаходимо $x_0 = -1$, $y_0 = -4$. Шуканою точкою є точка $M_0\left(-1;\, -4;\, 0\right)$.

Координати напрямного вектора $\vec{a}$ обчислюємо згідно з (2):

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};\, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}\left(-1;\, 5;\, 3\right).$$

Отже, канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}\,.$$

§4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай дві прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}\,, \tag{1}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}\,. \tag{2}$$

Пряма l_1 проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(m_2; n_2; p_2)$.

Можливі чотири різних випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2 у просторі:

1º. Прямі мимобіжні, тобто такі, через які не можна провести площину.

2º. Прямі перетинаються.

3º. Прямі паралельні.

4º. Прямі співпадають.

Взаємне розміщення заданих прямих l_1 і l_2 можна визначити за векторами $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Для цього з координат цих векторів складемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

і позначимо ранги матриць A і B відповідно r_1 і r_2.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямих l_1 і l_2.

Теорема 1. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були мимобіжними, необхідно і достатньо, щоб $r_2 = 3$, тобто $\det B \neq 0$.

<u>Доведення</u>. Необхідність. Покажемо, що для мимобіжних прямих l_1 і l_2 справедлива рівність $r_2 = 3$. Дійсно, за умови мимобіжності прямих вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – некомпланарні, тобто не паралельні одній площині. Умовою некомпланарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ є відмінність від нуля їх мішаного добутку:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2 \neq 0 .$$

Тому визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю, тобто $\det B \neq 0$.

Достатність. Покажемо тепер, що за умови $r_2 = 3$, тобто $\det B \neq 0$ прямі l_1 і l_2 мимобіжні. Дійсно, якщо $\det B \neq 0$, то мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ не дорівнює нулю. Це рівносильно тому, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не паралельні одній площині. Тому прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб прямі l_1 і l_2 перетинались, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$.

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються, то $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$. Дійсно, у випадку перетину прямих l_1 і l_2 вони лежать в одній площині. Тому вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – компланарні і, отже, $\det B = 0$. Це означає, що $r_2 < 3$. З перетину прямих l_1 і l_2 випливає також неколінеарність векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому $r_1 = 2$. Оскільки матриця B отримується з матриці A добавлянням рядка, то і ранг матриці B дорівнює 2.

Достатність. Якщо $r_2 = 2$, то $\det B = 0$ і вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ – компланарні. Тому прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині.

Якщо, крім цього, $r_1 = 2$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не колінеарні. Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб прямі l_1 і l_2 були паралельними, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$ і $r_2 = 2$.

<u>*Доведення*</u>. *Необхідність.* Потрібно показати, що для паралельних прямих l_1 і l_2 справедливі рівності $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Дійсно, за умови паралельності прямі l_1 і l_2 лежать в одній площині. Тому вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарні і $\det B = 0$. Звідси випливає, що $r_2 < 3$. З іншого боку, із умови паралельності прямих l_1 і l_2 випливає, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні і тому $r_1 = 1$. Ранг r_2 матриці B дорівнює 2, оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}_1$ не колінеарні.

Достатність. Нехай $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Тоді прямі l_1 і l_2 паралельні, оскільки вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, і не співпадають, бо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний вектору $\vec{a}_1$ або $\vec{a}_2$.

Теорему доведено.

Теорема 4. Для того щоб прямі l_1 і l_2 співпадали, необхідно і достатньо, щоб $r_1 = 1$, $r_2 = 1$.

Доведення теореми 4 аналогічне доведенню теореми 3. У цьому випадку вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ колінеарні і рівняння (1) і (2) є рівняннями однієї прямої.

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення двох прямих

$$\frac{x}{10} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-6} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + 6y + z - 8 = 0 \\ 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо задані прямі відповідно l_1 і l_2. Пряма l_1 проходить через точку $M_1(0;-1;3)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(10;-4;-6)$. Поклавши $x=0$, $y=0$, з рівнянь прямої l_2 знаходимо $z=8$. Тому пряма l_2 проходить через точку $M_2(0;0;8)$. Знайдемо напрямний вектор $\vec{a}_2$ прямої l_2 згідно з (2) §3:

$$\vec{a}_2\left(\begin{vmatrix}6 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 6\\ 2 & 5\end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}_2(-5;2;3).$$

Для заданих прямих вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $\overrightarrow{M_1M_2}(0;1;5)$. Координати векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ пропорційні, тому вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, тобто $r_1=1$. Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ не пропорційні координатам векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тому вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не колінеарний векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, тобто $r_2=2$. Отже, $r_1=1$, $r_2=2$ і прямі l_1 і l_2 паралельні.

§5. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Розглянемо у просторі площину α, задану загальним рівнянням

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

і пряму l, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{2}$$

Пряма l проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m; n; p)$.

Можливі три різних випадки взаємного розміщення прямої l і площини α:

1°. Пряма і площина перетинаються в єдиній точці – це загальний тип розміщення прямої і площини у просторі.

2°. Пряма і площина не мають жодної спільної точки, тобто пряма l паралельна площині α, але не лежить у ній.

3°. Пряма і площина мають нескінченну множину спільних точок, тобто пряма l лежить у площині α.

Дослідимо всі можливі випадки взаємного розміщення прямої l і площини α. Ця задача з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи, що складається з рівнянь (1) і (2). Для знаходження спільних точок прямої l і площини α підставимо в рівняння (1) значення x, y, z з рівнянь (2). Після перетворень отримаємо рівняння відносно параметра t:

$$A\left(x_0+mt\right)+B\left(y_0+nt\right)+C\left(z_0+pt\right)+D=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t\left(Am+Bn+Cp\right)+\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)=0. \qquad (3)$$

З рівняння (3) випливає, що:

а) якщо

$$Am+Bn+Cp\neq 0, \qquad (4)$$

то воно має єдиний розв’язок

$$t_0=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Підставивши цей розв’язок у формули (2), отримаємо єдину точку

$$M_1\left(x_0+mt_0;\, y_0+nt_0;\, z_0+pt_0\right)$$

перетину прямої l і площини α. Тому умова (4) є достатньою умовою перетину площини α і прямої l в єдиній точці M_1.

б) Якщо

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ і } Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0, \qquad (5)$$

то рівняння (3) набуває вигляду

$$0\cdot t+\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)=0,$$

тобто не має розв’язків. Геометрично це означає, що пряма l і площина α паралельні. Отже, умова (5) є достатньою умовою паралельності прямої l і площини α.

в) Якщо

$$Am+Bn+Cp=0 \text{ і } Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \qquad (6)$$

то рівняння (3) приймає вигляд

$$0\cdot t+0=0$$

і тому виконується для довільного t. Це означає, що пряма l лежить у площині α. Умова (6) є достатньою умовою того, що пряма l лежить у площині α.

Доведені нами достатні умови того чи іншого взаємного розміщення прямої l і площини α є одночасно і необхідними умовами. Це доводиться відразу ж методом від противного. Як приклад, наведемо доведення необхідної умови перетину прямої l і площини α.

Теорема 1. Якщо пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці, то виконується умова (4).

Доведення. Припустимо протилежне, тобто

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Тоді згідно з (5) або (6) площина α і пряма l або паралельні, або пряма l лежить у площині α. Одержане протиріччя доводить необхідність умови (4).

Наведені вище результати щодо взаємного розміщення прямої l і площини α сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 2. Для того щоб пряма l і площина α перетинались у єдиній точці, необхідно і достатньо виконання умови

$$Am + Bn + Cp \neq 0 .$$

Теорема 3. Для того щоб пряма l і площина α були паралельними, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 .$$

Теорема 4. Для того щоб пряма l лежала у площині α, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$Am + Bn + Cp = 0 \text{ і } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 .$$

Приклад 1. Дослідити взаємне розміщення прямої l

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$$

і площини α

$$x + 2y + z - 2 = 0 .$$

Розв'язання. Пряма l проходить через $M_0(-1; 2; -3)$ паралельно вектору $\vec{a}(1; -1; 2)$. Тому параметричними рівняннями прямої l будуть рівняння

$$x = -1 + t ,\ y = 2 - t ,\ z = -3 + 2t .$$

Підставляємо ці значення змінних у рівняння площини α :

$$(-1+t) + 2(2-t) + (-3+2t) - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 .$$

Оскільки знайдене значення параметра $t = 2$ є єдиним, робимо висновок, що пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці:

$$M_1(-1+2;\ 2-2;\ -3+4) \Leftrightarrow M_1(1;\ 0;\ 1) .$$

Зауваження 1. Розглянемо питання про взаємне розміщення площини α (1) і прямої l, коли останню задано її загальними рівнянням

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

У цьому випадку можна було б перейти від загальних рівнянь прямої l до її канонічних рівнянь і скористатись наведеними вище результатами про взаємне розміщення прямої l і площини α .

Розглянемо інший підхід до розв'язання цієї задачі, який вже використовувався нами в §12 гл. XVII при дослідженні взаємного розміщення трьох площин.

Нехай ранги матриць

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

відповідно дорівнюють r_1 і r_2.

Згідно з результатами §12 гл. XVII маємо:

а) Пряма l і площина α перетинаються в єдиній точці тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 3$, $r_2 = 3$. Ця точка є точкою перетину трьох площин. Для знаходження координат цієї точки потрібно знайти розв'язок відповідної системи рівнянь.

б) Пряма l і площина α паралельні, але пряма l не лежить у площині α, тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.

У цьому випадку три площини утворюють нескінченну призму.

в) Пряма l лежить у площині α тоді і тільки тоді, коли $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. У цьому випадку площина α належить до пучка площин, віссю якого є пряма l.

§6. Кут між прямою і площиною. Умова перпендикулярності прямої і площини

6.1. Розглянемо площину α, яку задано загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

і пряму l з канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2}$$

<u>Означення 1</u>. Якщо пряма l не перпендикулярна до площини α, то кутом між прямою l і площиною α називається менший з двох кутів між цієї прямою та її ортогональною проекцією на площину α. Якщо ж пряма і площина перпендикулярні, то кут між ними вважається рівним $\frac{\pi}{2}$.

Обчислення кута між прямою l і площиною α зведемо до обчислення кута між напрямним вектором $\vec{a}(m; n; p)$ прямої l та нормальним вектором $\vec{N}(A; B; C)$ площини α (рис. 1, 2).

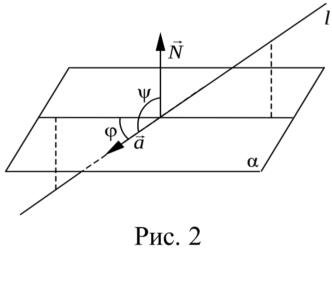

Рис. 2

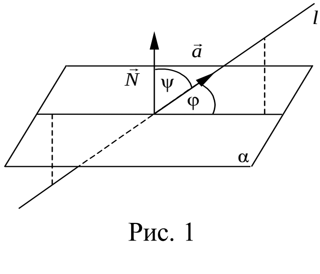

Рис. 1

Нехай φ – кут між прямою l і площиною α, а $\psi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{N}}\right)$. Якщо $\psi \le \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ і $\sin\varphi = \cos\psi$ (рис. 1). Якщо ж $\psi > \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ і $\sin\varphi = -\cos\psi$ (рис. 2). Оскільки $\sin\varphi \ge 0$, то для кожного φ маємо

$$\sin\varphi = \left|\cos\psi\right|.$$

З означення скалярного добутку випливає, що

$$\cos\psi = \frac{\vec{N} \cdot \vec{a}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{a}\right|}.$$

Тому

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (3)$$

Якщо пряму l задано загальними рівняннями, то для того щоб скористатись формулою (3), попередньо потрібно визначити координати напрямного вектора $\vec{a}$ прямої l (див. (2) §3).

6.2. Якщо пряма l, яку задано рівняннями (2), перпендикулярна до площини α з рівнянням (1), то напрямний вектор $\vec{a}(m; n; p)$ прямої l колінеарний нормальному вектору $\vec{N}(A; B; C)$ площини α. Тому координати цих векторів пропорційні, тобто існує таке відмінне від нуля число λ, що

$$A = \lambda m,\ B = \lambda n,\ C = \lambda p$$

або

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4)$$

Навпаки, якщо рівності (4) виконуються, то вектори $\vec{a}(m; n; p)$ і $\vec{N}(A; B; C)$ колінеарні, тобто напрямний вектор заданої прямої l паралельний до нормального вектора заданої площини α. З цього випливає, що пряма l і площина α взаємно перпендикулярні. Цим самим доведено наступну теорему.

Теорема 1. Для того щоб пряма l і площина α були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб координати напрямного вектора прямої l були пропорційні коефіцієнтам при x, y, z в рівнянні (1) площини α.

Приклад 1. Знайти кут між прямою l

$$\begin{cases} 6x-2y-z-20=0 \\ 15x-2y-4z-8=0 \end{cases}$$

і площиною α

$$6x+15y-10z+31=0.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l. Згідно з (2) §3

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 15 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -2 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(6;9;18).$$

Для спрощення подальших обчислень зручно розділити всі координати вектора $\vec{a}$ на 3, тобто перейти до напрямного вектора $\vec{a}(2;3;6)$. За формулою (3) знаходимо

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 2+15\cdot 3-10\cdot 6|}{\sqrt{6^2+15^2+(-10)^2}\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{3}{19\cdot 7} = \frac{3}{133} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{3}{133} \Rightarrow \varphi \approx 1^0 18'.$$

§7. Обчислення відстані від точки до прямої у просторі

Нехай у просторі задано точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і пряму l

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (1)$$

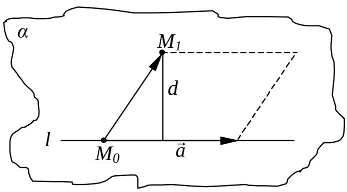

Рис. 1

Пряма l проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ паралельно вектору $\vec{a}(m;\ n;\ p)$. Відстань d від точки M_1 до прямої l дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на цю пряму (рис. 1). З іншого боку, відстань d – це висота паралелограма, сторонами якого є вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ і напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l, відкладений від точки M_0 цієї прямої.

Якщо S – площа цього паралелограма, то

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|}. \qquad (2)$$

Площу S можна обчислити як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\vec{a}$ (див. §3 гл. VII):

$$S=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}\right|.$$

Оскільки $\overrightarrow{M_0M_1}\left(x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0\right)$, $\vec{a}\left(m;\ n;\ p\right)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}\right).$$

Тому

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}.$$

Формулу (2) запишемо у координатній формі:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Приклад 1. Знайти відстань від точки $M_1\left(1;\ 1;\ 3\right)$ до прямої l

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}.$$

Розв'язання. Пряма l проходить через точку $M_0\left(-1;\ -1;\ 0\right)$ паралельно вектору $\vec{a}\left(1;\ 2;\ -1\right)$. Знайдемо модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{M_0M_1}\left(2;\ 2;\ 3\right)$ і $\vec{a}\left(1;\ 2;\ -1\right)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}$ має координати

$$\left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\left(-8;\ 5;\ 2\right),$$

то

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{a}\right|=\sqrt{64+25+4}=\sqrt{93}.$$

Отже, $d=\frac{\sqrt{93}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}}$ (лін. од.).

§8. Обчислення відстані між двома мимобіжними прямими. Рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих

8.1. Розглянемо дві мимобіжні прямі l_1 і l_2, які задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad (1)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \quad (2)$$

Пряма l_1 проходить через точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(m_1;\, n_1;\, p_1)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(m_2;\, n_2;\, p_2)$.

З курсу елементарної геометрії відомо, що існує одна і тільки одна пряма P_1P_2, перпендикулярна до прямих l_1 і l_2 і така, що перетинає ці прямі відповідно у точках P_1 і P_2. Відстань d між мимобіжними прямими l_1 і l_2 дорівнює довжині відрізка спільного перпендикуляра P_1P_2. Для обчислення відстані d немає потреби знаходити рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2. Достатньо обчислити відстань між паралельними площинами α_1 і α_2, у яких лежать відповідно прямі l_1 і l_2.

Перенесемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ у точку M_1 і на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ побудуємо паралелепіпед (рис. 1). Якщо $M_1R_1Q_1H_1M_2R_2Q_2H_2$ – побудований паралелепіпед і позначення введені так, що вектор $\vec{a}_1$ направлено вздовж ребра M_1H_1, а вектор $\vec{a}_2$ – вздовж ребра M_1R_1, то пряма l_1 співпадає з прямою M_1H_1, а пряма l_2 – з прямою M_2R_2 (рис. 1). Якщо α_1 – площина грані $M_1R_1Q_1H_1$, а α_2 – площина паралельної до неї грані $M_2R_2Q_2H_2$, то шукана відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює відстані між паралельними площинами α_1 і α_2, яка, в свою чергу, дорівнює висоті побудованого паралелепіпеда. Позначимо через V – об'єм побудованого паралелепіпеда, а через S – площу грані $M_1R_1Q_1H_1$.

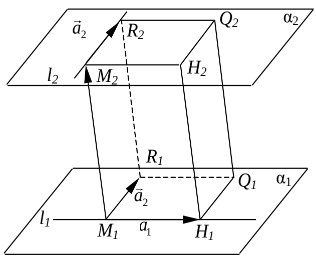

Рис. 1

Тоді

$$d=\frac{V}{S}. \quad (3)$$

З властивостей мішаного і векторного добутків маємо:

$$V=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\vec{a}_1\,\vec{a}_2\right|,\ S=\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|.$$

Тому формула (3) набуває вигляду

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{a}_1\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|}.$$

Залишається виразити модулі мішаного і векторного добутків через координати векторів. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ мають координати відповідно

$$\left(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\right)\ \text{ і }\ \left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix} m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}\right),$$

то, скориставшись записом мішаного добутку як визначника з координат векторів-множників, отримуємо формулу для обчислення відстані між мимобіжними прямими

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1\\ n_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & p_1\\ m_2 & p_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2}}. \tag{4}$$

Приклад 1. Знайти відстань d між мимобіжними прямими l_1 і l_2, які задано рівняннями

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}\quad\text{і}\quad\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{0}.$$

Розв'язання. Пряма l_1 проходить через точку $M_1(2;-1;0)$ паралельно вектору $\vec{a}_1(3;-2;2)$, а пряма l_2 – через точку $M_2(-1;2;1)$ паралельно вектору $\vec{a}_2(3;2;0)$. Підставляємо ці дані у формулу (4):

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}^2}}=\frac{\left|\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{16+36+144}}=\frac{\left|-3(1-15)\right|}{14}=\frac{3\cdot 14}{14}=3\ \text{(лін. од.)}.$$

8.2. Перейдемо до знаходження рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2, які задано канонічними рівняннями (1) і (2). Вважаємо напрямні вектори цих прямих $\vec{a}_1(m_1;\, n_1;\, p_1)$ і $\vec{a}_2(m_2;\, n_2;\, p_2)$ неколінеарними, тобто прямі або мимобіжні, або перетинаються. Нехай пряма P_1P_2 є спільним перпендикуляром прямих l_1 і l_2. Тоді за напрямний вектор прямої P_1P_2 можна взяти векторний добуток $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ напрямних векторів заданих прямих, координати якого

$$\left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix};\, -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix};\, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right).$$

Пряму P_1P_2 можна знайти так. Проведемо через прямі l_1 і l_2 площини відповідно α_1 і α_2, паралельні вектору $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ (рис. 2). Перетином площин α_1, α_2 і є спільний перпендикуляр P_1P_2.

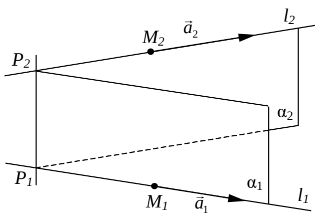

Рис. 2

Оскільки площина α_1 проходить через точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і паралельна двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1(m_1;\, n_1;\, p_1)$ і $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, то згідно з формулою (6) §5 гл. XVII рівняння цієї площини можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5}$$

Аналогічно, складаємо рівняння площини α_2:

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Спільний перпендикуляр до заданих прямих (1) і (2) визначається системою рівнянь (5) і (6).

Приклад 2. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 з прикладу 1.

Розв'язання. Шуканий спільний перпендикуляр згідно з формулами (5), (6) є лінією перетину площин α_1 і α_2:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(-18)-(y+1)22+5z=0 \\ (x+1)12-(y-2)18+(z-1)13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18x-22y+5z+14=0 \\ 12x-18y+13z+11=0. \end{cases}$$

§9. Приклади розв'язування задач аналітичної геометрії на пряму і площину

Щоб навчитися розв'язувати задачі на пряму і площину, слід у першу чергу засвоїти матеріал XVII і XVIII глав. Переважну більшість таких задач можна розв'язувати різними способами. Тому потрібно намагатися знайти найраціональніший з них. Для цього корисно пам'ятати, що розв'язування багатьох задач значно спрощується вмілим застосуванням апарату векторної алгебри; розв'язування багатьох задач на площину зручно проводити з використанням поняття пучка площин та рівнянь площин у вигляді визначника; розв'язок багатьох задач на пряму можна отримати відразу ж, якщо скористатись рівняннями прямої як лінії перетину двох площин тощо.

Розв'яжемо декілька типових задач на пряму і площину у просторі.

Задача 1. Знайти проекцію точки $C(3;-4;-2)$ на площину α, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}\,, \tag{1}$$

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}\,. \tag{2}$$

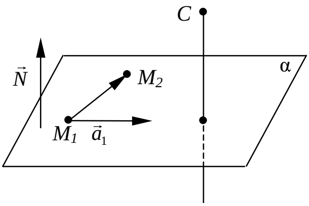

Рис. 1

Розв'язання. Пряма (1) проходить через точку $M_1(2;\,3;\,-3)$, а пряма (2) – через точку $M_2(5;\,6;\,-3)$. Обидві прямі паралельні вектору $\vec{a}_1(13;\,1;\,-4)$. Тому площина α проходить через точку $M_1(2;\,3;\,-3)$ і паралельна векторам $\vec{a}_1(13;\,1;\,-4)$ і $\overrightarrow{M_1M_2}\,(3;\,3;0)$ (рис. 1).

Замість вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ візьмемо вектор $\vec{a}_2(1;\,1;\,0)$ і скористаємось формулою (6) §5 гл. XVII, згідно з якою рівнянням площини α є рівняння

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+3 \\ 13 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)4-(y-3)4+(z+3)12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2-y+3+3z+9=0 \Leftrightarrow x-y+3z+10=0\,. \qquad (3)$$

За напрямний вектор прямої l, що проходить через точку C перпендикулярно площині (3), візьмемо нормальний вектор $N(1;\,-1;\,3)$ цієї площини. Тому параметричними рівняннями прямої l є рівняння

$$x=3+t\,,\ y=-4-t\,,\ z=-2+3t\,. \qquad (4)$$

Підставимо (4) в (3) і знайдемо параметр t, який відповідає точці перетину прямої l з площиною (3):

$$3+t+4+t-6+9t+10=0 \Leftrightarrow t=-1\,.$$

Отже, проекцією точки C на площину α є точка з координатами $(2;\,-3;\,-5)$.

Задача 2. Знайти точку, симетричну точці $P(1;\,2;\,3)$ відносно прямої l

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}\,. \qquad (5)$$

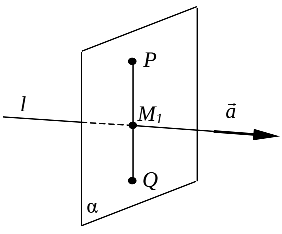

Рис. 2

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати точки $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$, яка є ортогональною проекцією точки P на пряму l. Для цього складемо рівняння площини α, що проходить через точку P перпендикулярно прямій l (рис. 2), взявши за нормальний вектор $\vec{N}$ цієї площини напрямний вектор $\vec{a}(1;\,3;\,-1)$ прямої l:

$$1\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)-1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow x+3y-z-4=0\,. \qquad (6)$$

Знайдемо точку M_1 перетину прямої l з площиною α. Для цього запишемо параметричні рівняння прямої (5):

$$x=8+t\,,\ y=11+3t\,,\ z=4-t\,. \qquad (7)$$

Підставивши (7) у (6), будемо мати

$$8+t+33+9t-4+t-4=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Отже, координатами точки M_1 є числа

$$x_1=8-3=5,\ y_1=11-9=2,\ z_1=4+3=7.$$

Якщо точка $Q(x_2;\ y_2;\ z_2)$ симетрична точці $P(1;\ 2;\ 3)$ відносно прямої l, то

$$5=\frac{1+x_2}{2},\quad 2=\frac{2+y_2}{2},\quad 7=\frac{3+z_2}{2} \Leftrightarrow x_2=9,\quad y_2=2,\quad z_2=11.$$

Задача 3. Знати рівняння проекції прямої l

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \tag{8}$$

на площину α

$$3x-y+z-6=0. \tag{9}$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку рівняння площини, що проектує пряму (8) на площину (9), скориставшись рівнянням пучка площин, віссю якого є пряма (8)

$$(2x-y+z-3)+\lambda(x+y+2z+1)=0. \tag{10}$$

Виберемо λ так, щоб площина (10) була перпендикулярною до площини (9). Для цього необхідно і достатньо, щоб нормальні вектори цих площин $\vec{N}_1(2+\lambda;\ -1+\lambda;\ 1+2\lambda)$ і $\vec{N}_2(3;\ -1;\ 1)$ були ортогональними, тобто

$$\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0 \Leftrightarrow (2+\lambda)3-(-1+\lambda)\cdot1+(1+2\lambda)\cdot1=0 \Leftrightarrow \lambda=-2.$$

Підставивши знайдене значення λ у рівняння (10), отримуємо рівняння проектуючої площини

$$3y+3z+5=0. \tag{11}$$

Проекція заданої прямої (8) на площину (9) є лінією перетину площин (11) і (9). Тому рівняннями цієї проекції є

$$\begin{cases} 3y+3z+5=0 \\ 3x-y+z-6=0. \end{cases}$$

Задача 4. Знайти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(1;\ 2;\ -2)$ і перетинає дві мимобіжні прямі

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1} \quad \text{і} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}. \tag{12}$$

Розв'язання. Шукану пряму l будемо розглядати як пряму перетину двох площин, кожна з яких проходить через задану точку M_0 і одну із заданих прямих (12). Рівняння площини, що проходить через точку M_0 і першу пряму (12), знаходимо з умови: пряма проходить через точку $M_0(1;\,2;\,-2)$ і паралельна векторам $\vec{a}_1(1;\,2;\,-1)$ і $\overrightarrow{M_0M_1}(1;\,-2;\,1)$, де $M_1(2;\,0;\,-1)$ – точка першої прямої (12). Маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot 0-(y-2)\cdot 2+(z+2)(-4)=0 \Leftrightarrow y+2z+2=0\,.$$

Аналогічно, знаходимо рівняння другої площини, яка проходить через точку M_0 і другу пряму (12). Ця пряма паралельна векторам $\vec{a}_2(2;\,3;\,1)$ і $\overrightarrow{M_0M_2}(-2;\,-2;\,4)$, де $M_2(-1;\,0;\,2)$ – точка другої прямої (12). Тому

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot 7-(y-2)\cdot 5+(z+2)\cdot 1=0 \Leftrightarrow 7x-5y+z+5=0\,.$$

Отже, шукана пряма має рівняння

$$\begin{cases} y+2z+2=0 \\ 7x-5y+z+5=0. \end{cases}$$

Задача 5. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;\,5;\,-1)$ перпендикулярно прямим

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \\ z=-2t. \end{cases}$$

Розв'язання. Напрямний вектор шуканої прямої за умовою перпендикулярний до напрямних векторів $\vec{a}_1(-1;\,3;\,-1)$ і $\vec{a}_2(-3;\,1;\,-2)$ заданих прямих. Тому за такий вектор можна взяти векторний добуток $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix};\,-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix};\,\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(-5;\,1;\,8)\,.$$

Отже, шукана пряма має канонічні рівняння

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{8}\,.$$

Задача 6. Задано пряму

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4} \qquad (13)$$

і площину

$$x+2y-z=0\,. \qquad (14)$$

Через точку, в якій ці пряма і площина перетинаються, проведено пряму l так, що вона лежить у заданій площині (14) і перпендикулярна заданій прямій (13). Скласти рівняння прямої l.

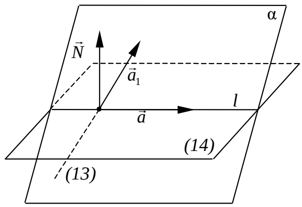

Рис. 3

Розв'язання. Шукана пряма l є лінією перетину заданої площини (14) і площини α, що проходить через пряму (13) і шукану пряму l (рис. 3).

Площина α проходить через точку $M_1(1;\,0;\,0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{a}_1(2;\,3;\,4)$ прямої (13) і напрямному вектору $\vec{a}$ шуканої прямої l. Щоб записати рівняння площини α, знайдемо координати вектора $\vec{a}$. З умови задачі випливає, що вектор $\vec{a}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}_1$. Оскільки пряма l лежить у площині (14), то вектор $\vec{a}$ перпендикулярний також нормальному вектору $\vec{N}(1;\,2;\,-1)$ цієї площини. Отже, напрямний вектор $\vec{a}$ прямої l одночасно перпендикулярний векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{N}$. Тому він паралельний векторному добутку

$$\vec{b}=\vec{a}_1\times\vec{N}\Leftrightarrow\vec{b}\left(\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\ \vec{b}(-11;\,6;\,1).$$

Рівнянням площини α буде рівняння

$$\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 2 & 3 & 4\\ -11 & 6 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x-1)(-21)-y\cdot 46+z\cdot 45=0\Leftrightarrow\ 21x+46y-45z-21=0\ ,$$

а рівняннями прямої l – рівняння

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ 21x+46y-45z-21=0.\end{cases}$$

§10. Застосування теорії прямої і площини до розв'язання задач елементарної геометрії

У цьому параграфі наводяться приклади застосувань теорії прямої і площини до розв'язання стереометричних задач елементарної геометрії.

Задача 1. Нехай у тетраедрі $OABC$ ребра OA, OB і OC взаємно перпендикулярні. Показати, що у цьому випадку виконують рівність

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}\ , \qquad (1)$$

де OH – висота, опущена з вершини O на грань ABC.

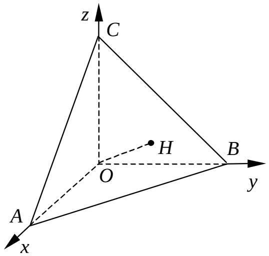

Рис. 1

Розв'язання. Точку O виберемо за початок, а напрямлені прямі OA, OB, OC – за осі координат декартової прямокутної системи координат (рис. 1). Нехай $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OH = h$. Тоді у вибраній системі координат площина ABC має таке рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z - abc = 0.$$

Скористаємось формулою для знаходження відстані від точки $O(0; 0; 0)$ до площини (2):

$$h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} \Leftrightarrow h^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Означення 1. Тетраедр, у якого ребра OA, OB, OC взаємно перпендикулярні, називається прямокутним.

Задача 2. Довести, що протилежні ребра прямокутного тетраедра ортогональні.

Розв'язання. Доведення проведемо, наприклад, для ребер OA і BC (рис. 1). Спочатку відмітимо, що ці ребра не лежать в одній площині. Дійсно, введемо вектори

$$\overrightarrow{OA}(a; 0; 0), \quad \overrightarrow{AC}(-a; 0; c), \quad \overrightarrow{BC}(0; -b; c).$$

Оскільки мішаний добуток

$$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -a & 0 & c \\ 0 & -b & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 0 & c \\ -b & c \end{vmatrix} = abc \neq 0,$$

то вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$ некомпланарні. Це означає, що ребра OA і BC не лежать в одній площині, тобто є мимобіжними.

Для перпендикулярності цих ребер необхідно і достатньо, щоб скалярний добуток ненульових векторів $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{BC}$ дорівнював нулю:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot 0 + 0 \cdot (-b) + 0 \cdot c = 0.$$

Доведення для інших пар ребер проводиться аналогічно.

Задача 3. Довести теорему Піфагора для прямокутного тетраедра, тобто:

а) якщо S_1, S_2, S_3 – площі бічних граней прямокутного тетраедра, а S – площа його основи, то

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2; \tag{3}$$

б) площа бічної грані прямокутного тетраедра є середнім геометричним площі основи і площі проекції цієї бічної грані на площину основи (рис. 2).

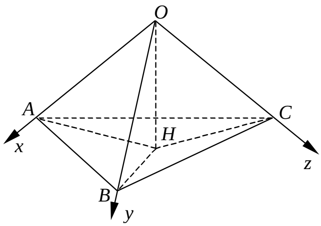

Рис. 2

Розв'язання. а) Введемо декартову прямокутну систему координат так, як і в задачі 1. Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають координати $\overrightarrow{AB}(-a;\, b;\, 0)$, $\overrightarrow{AC}(-a;\, 0;\, c)$, то площа S основи ABC дорівнює

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2} \quad \Leftrightarrow \quad S^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right). \qquad (4)$$

Позначимо через S_1, S_2, S_3 площі бічних граней відповідно OAB, OBC і OAC.

Тоді (рис. 1)

$$S_1=\frac{1}{2}ab\,,\ S_2=\frac{1}{2}bc\,,\ S_3=\frac{1}{2}ac \quad \text{і} \quad S_1^2+S_2^2+S_3^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right). \qquad (5)$$

Порівнюючи рівності (4) і (5), отримуємо формулу (3).

б) Якщо OH – висота тетраедра $OABC$, опущена на грань ABC, то проекцією грані OAB на площину ABC є трикутник ABH (рис. 2). Позначимо його площу через $S(ABH)$. Потрібно довести, що

$$S^2(OAB)=S(ABC)S(ABH), \qquad (6)$$

де $S(OAB)$ і $S(ABC)$ – площі граней відповідно OAB і ABC.

Можна знайти координати точки перетину площини ABC з прямою OH (координати точки H) і обчислити площу $S(ABH)$ за формулою

$$S(ABH)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{HA}\times\overrightarrow{HB}\right|.$$

Проте ці обчислення є досить громіздкими. Щоб їх уникнути, знайдемо площу $S(ABH)$ як площу проекції грані OAB на грань ABC. Для цього обчислимо косинус кута між цими гранями, який дорівнює косинусу кута між нормальним вектором $\vec{N}_1\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ грані ABC (див. (2)) і нормальним вектором $\vec{N}_2(0;0;1)$ грані OAB (рис. 1):

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec N_1,\hat{\ }\vec N_2\right)=\frac{\vec N_1\cdot\vec N_2}{\left|\vec N_1\right|\left|\vec N_2\right|}=\frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=$$

$$=\frac{abc}{c\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

Тоді

$$S(ABH)=S(OAB)\cos\varphi=\frac{ab}{2}\frac{ab}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

Отже (див. (4)),

$$S(ABC)S(ABH)=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{2}\frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{a^2b^2}{4}=S^2(OAB).$$

Задача 4. Задано куб з ребром a. Знайти: 1) відстань між діагоналлю куба і мимобіжною до неї діагоналлю грані; 2) рівняння спільного перпендикуляра цих діагоналей.

Розв'язання. Виберемо декартову прямокутну систему координат так, як показано на рис. 3. Тоді $O(0;0;0)$, $A_1(a;0;a)$, $O_1(0;0;a)$, $C(a;a;0)$ і $\overrightarrow{OA_1}(a;0;a)\parallel\vec a_1(1;0;1)$, $\overrightarrow{O_1C}(a;a;-a)\parallel\vec a_2(1;1;-1)$.

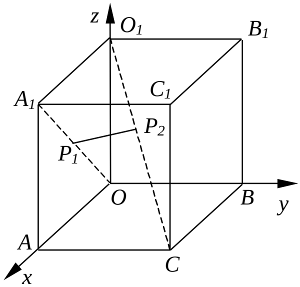

Рис. 3

Прямі OA_1 і O_1C мимобіжні тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{O_1C}$ некомпланарні, тобто їх мішаний добуток не дорівнює нулю. У нашому випадку

$$\overrightarrow{OO_1}\,\overrightarrow{OA_1}\,\overrightarrow{O_1C}=\begin{vmatrix}0&0&a\\a&0&a\\a&a&-a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&0\\a&a\end{vmatrix}=a^3\neq0.$$

Знайдемо канонічні рівняння прямих OA_1 і O_1C. Пряма OA_1 проходить через точку $O(0;0;0)$ паралельно вектору $\vec a_1(1;0;1)$. Тому її канонічними рівняннями є рівняння

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}. \qquad (7)$$

Пряма O_1C проходить через точку $O_1(0;0;a)$ паралельно вектору $\vec a_2(1;1;-1)$ і тому має канонічні рівняння

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-a}{-1}. \qquad (8)$$

Оскільки кінці вектора $\overrightarrow{OO_1}$ лежать на прямих OA_1 і O_1C, то згідно з формулою (4) §8 відстань d між цими прямими дорівнює

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{OO_1}\vec{a}_1\,\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\left|a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{a}{\sqrt{6}} \text{ (лін од.).}$$

Рівняння спільного перпендикуляра P_1P_2 прямих OA_1 і O_1C згідно з формулами (5), (6) §8 знаходимо як лінію перетину площин:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y & z-a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-2) - y \cdot 2 + z \cdot 2 = 0 \\ x \cdot 3 - y \cdot 0 + (z-a) \cdot 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - a = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Знайдемо координати точок P_1 і P_2, що лежать на прямих OA_1 і O_1C, розв'язавши відповідні системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - a = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - a = 0 \\ y = 0 \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow P_1\left(\frac{a}{2};\, 0;\, \frac{a}{2}\right);$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - a = 0 \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-a}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - a = 0 \\ x = y \\ y = a - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{3} \\ y = \dfrac{a}{3} \\ z = \dfrac{2}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow P_2\left(\frac{a}{3};\, \frac{a}{3};\, \frac{2a}{3}\right).$$

Задача 5. Основою піраміди $SABC$ є рівносторонній трикутник ABC з довжиною сторони $4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC перпендикулярне до площини основи і має довжину 2. Знайти величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра BC, а друга – через точку C і середину ребра AB.

Розв'язання. Нехай $SABC$ (рис. 4) – піраміда, яку задано в умові задачі. Точки E і F – середини ребер BC і AB відповідно. Виберемо декартову прямокутну систему координат, як показано на рис. 4, і знайдемо в ній координати вершин

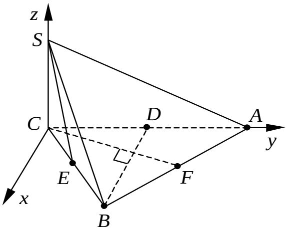

Рис. 4

піраміди і точок E і F. Відмітимо спочатку, що BD є висотою h рівностороннього трикутника ABC, тому $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тобто $h=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$. Отже, $C(0;\,0;\,0)$, $A\left(0;\,4\sqrt{2};\,0\right)$, $B\left(2\sqrt{6};\,2\sqrt{2};\,0\right)$, $S(0;\,0;\,2)$,

$$E\left(\frac{0+2\sqrt{6}}{2};\,\frac{0+2\sqrt{2}}{2};\,0\right)\Leftrightarrow E\left(\sqrt{6};\,\sqrt{2};\,0\right),$$

$$F\left(\frac{0+2\sqrt{6}}{2};\,\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2};\,0\right)\Leftrightarrow F\left(\sqrt{6};\,3\sqrt{2};\,0\right).$$

Перевіримо, що прямі SE і CF мимобіжні, тобто вектори $\overrightarrow{CS}(0;\,0;\,2)$, $\overrightarrow{SE}\left(\sqrt{6};\,\sqrt{2};\,-2\right)$, $\overrightarrow{CF}\left(\sqrt{6};\,3\sqrt{2};\,0\right)$ некомпланарні.

Дійсно,

$$\overrightarrow{CS}\,\overrightarrow{SE}\,\overrightarrow{CF}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & -2\\ \sqrt{6} & 3\sqrt{2} & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\sqrt{6} & \sqrt{2}\\ \sqrt{6} & 3\sqrt{2}\end{vmatrix}=2\left(3\sqrt{12}-\sqrt{12}\right)=4\sqrt{12}\neq 0.$$

Кут між мимобіжними прямими SE і CF знайдемо за допомогою скалярного добутку векторів $\overrightarrow{SE}$ і $\overrightarrow{CF}$. Маємо

$$\cos\left(\overrightarrow{SE},\hat{\ }\overrightarrow{CF}\right)=\frac{\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{SE}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2\cdot 0}{\sqrt{6+2+4}\sqrt{6+18+0}}=$$

$$=\frac{12}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{SE},\hat{\ }\overrightarrow{CF}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Для обчислення відстані між прямии SE і CF знову, як і в задачі 4, скористаємось формулою (4) §8. Для цього потрібні напрямні вектори прямих SE і CF і вектор $\overrightarrow{CS}$, кінці якого лежать на цих прямих. Вектор $\vec{a}_1\left(\sqrt{3};\,1;\,-\sqrt{2}\right)\parallel\overrightarrow{SE}$, тобто є напрямним вектором прямої SE. Аналогічно, вектор $\vec{a}_2\left(1;\,\sqrt{3};\,0\right)\parallel\overrightarrow{CF}$ є напрямним вектором прямої CF. Знайдемо векторний добуток $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$:

$$\vec{a}\left(\begin{vmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0\end{vmatrix};\,-\begin{vmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ 1 & 0\end{vmatrix};\,\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{vmatrix}\right)\Leftrightarrow\vec{a}\left(\sqrt{6};\,-\sqrt{2};\,2\right).$$

Тоді для відстані між прямими SE і CF отримуємо

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}0&0&2\\ \sqrt{3}&1&-\sqrt{2}\\ 1&\sqrt{3}&0\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{6+2+4}}=\frac{\left|2\begin{vmatrix}\sqrt{3}&1\\ 1&\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{ (лін. од.).}$$

Задача 6. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ бічна грань нахилена до основи під кутом α. Знайти кут φ між площинами AKC і SAB, якщо K – середина ребра SB.

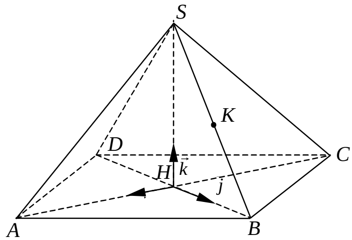

Рис. 5

Розв'язання. Виберемо за початок прямокутної декартової системи координат основу H висоти SH піраміди, опущеної з вершини S на площину $ABCD$ (рис. 5), а за координатні осі – діагоналі AC, BD і висоту SH. Додатні напрямки осей показано на рис. 5. Якщо $AC=BD=2a$, $SH=h$, то вершини піраміди і точка K мають координати: $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(-a;0;0)$, $D(0;-a;0)$, $S(0;0;h)$ і $\overrightarrow{HK}=\dfrac{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HS}}{2}\Leftrightarrow K\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right)$.

Запишемо рівняння площин ABC і SAB. Площина ABC є координатною площиною

$$z=0. \qquad (10)$$

Площина SAB відтинає на координатних осях відрізки $a,\ a,\ h$ і тому має рівняння у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1. \qquad (11)$$

Нормальними векторами площин (10) і (11) є відповідно вектори

$$\vec{N}_1(0;0;1) \quad \text{і} \quad \vec{N}_2\left(\frac{1}{a};\frac{1}{a};\frac{1}{h}\right).$$

Тому

$$\cos\alpha=\cos\left(\vec{N}_1,\hat{\ }\vec{N}_2\right)=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{\frac{1}{h}}{\frac{\sqrt{2h^2+a^2}}{ha}}=\frac{a}{\sqrt{2h^2+a^2}}. \qquad (12)$$

Знайдемо рівняння площини AKC. Оскільки ця площина проходить через вісь абсцис, то її рівняння має вигляд

$$By+Cz=0. \qquad (13)$$

Точка $K\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{h}{2}\right)$ лежить у площині (13), тому

$$\frac{Ba}{2}+\frac{Ch}{2}=0 \Leftrightarrow B=-\frac{Ch}{a} . \qquad (14)$$

Підставивши (14) у (13), отримуємо рівняння площини AKC :

$$-\frac{Ch}{a}y+Cz=0 \Leftrightarrow -hy+az=0 . \qquad (15)$$

Нормальним вектором цієї площини є вектор $\vec{N}_3\left(0; -h; a\right)$. Тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N_3}}{\left|\overrightarrow{N_2}\right|\left|\overrightarrow{N_3}\right|}=\frac{-\frac{h}{a}+\frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{a^2-h^2}{\sqrt{2h^2+a^2}\sqrt{a^2+h^2}} . \qquad (16)$$

Введемо позначення $k=\frac{h}{a}$ і перепишемо рівності (12) і (16) у вигляді

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} , \qquad (17)$$

$$\cos\varphi=\frac{1-k^2}{\sqrt{2k^2+1}\sqrt{1+k^2}}=\frac{1-k^2}{\sqrt{1+k^2}}\cos\alpha . \qquad (18)$$

Рівність (17) можна записати ще так:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2k^2+1} \Leftrightarrow 2k^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} . \qquad (19)$$

Якщо тепер підставити вираз для k^2 з (19) у формулу (18), то отримаємо остаточний результат:

$$\cos\varphi=\frac{\left(1-\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha}{\sqrt{1+\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}}}=\frac{3\cos^2\alpha-1}{\sqrt{2\left(1+\cos^2\alpha\right)}} . \qquad (20)$$