Площина у просторі

§1. Загальне рівняння площини

Розв'язання багатьох задач на площину у просторі з використанням векторно-аналітичного способу аналогічне розв'язанню відповідних задач для прямої на площині. Тому ми рекомендуємо читачу не розпочинати вивчення даного параграфа, поки він не відновить у пам'яті весь матеріал §2, 3, 4, 5 глави XIII і не спробує самостійно узагальнити цей матеріал на випадок площини.

<u>**Означення 1**</u>. Лінійним рівнянням відносно змінних x, y і z називається рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0\,, \tag{1}$$

де A, B, C – сталі, які не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема 1. Будь-яку площину у декартовій прямокутній системі координат можна задати лінійним рівнянням (1). Навпаки, будь-яке лінійне рівняння (1) відносно декартових координат є рівнянням площини.

<u>*Доведення*</u>. Нехай у просторі задано декартову прямокутну систему координат $\left\{O; \vec{i}\,; \vec{j}; \vec{k}\right\}$ і деяку площину α (рис. 1).

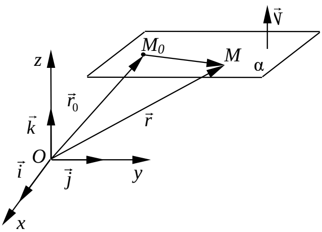

Рис. 1

Площина α однозначно визначається точкою M_0, через яку вона проходить, і ненульовим вектором $\vec{N}\left(A; B; C\right)$, перпендикулярним до цієї площини. Нехай M – змінна точка площини α. Введемо радіуси-вектори точок M_0 і M:

$$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} \quad \text{і} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який з'єднує задану точку M_0 площини α з довільною точкою M цієї площини, перпендикулярний вектору $\vec{N}$. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{N} = 0\,. \tag{2}$$

Якщо точка M не лежить на площині α, то умова перпендикулярності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ порушується, а тому рівність (2) не виконується. Отже, рівнянню (2) задовольняють радіуси-вектори $\vec{r}$ тільки тих точок, які лежать на площині α, тобто рівняння (2) є рівнянням цієї площини.

Якщо точки M_0 і M мають координати $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ і $M\left(x;\, y;\, z\right)$, то в координатній формі рівняння (2) набуває вигляду

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0\,, \tag{3}$$

де $D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)$.

У вигляді (2) або (3) можна подати рівняння будь-якої площини, оскільки будь-яка площина перпендикулярна деякому вектору $\vec{N}$ і проходить через деяку точку M_0.

Доведемо обернене: всі точки, координати яких задовольняють рівнянню (1) або (3), заповнюють площину, перпендикулярну вектору $\vec{N}\left(A;\, B;\, C\right)$. Для доведення знайдемо який-небудь частинний розв'язок рівняння (3). Щоб це зробити, достатньо в рівнянні (3) двом невідомим, наприклад, x і y надати довільних значень $x=x_0$, $y=y_0$, а третє невідоме z_0 знайти з цього рівняння. Отже, нехай x_0, y_0, z_0 – розв'язок рівняння (3), тобто

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\,. \tag{4}$$

Віднявши від рівняння (3) тотожність (4), отримуємо рівняння, рівносильне (3):

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\,. \tag{5}$$

У рівнянні (5) $x,\, y,\, z$ будемо розглядати як координати довільної точки M, тобто $\vec{r}=\overrightarrow{OM}\left(x;\, y;\, z\right)$, а частинний розв'язок $x_0,\, y_0,\, z_0$ – як координати фіксованої точки $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$, тобто $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$, деякої поверхні S.

У векторній формі рівняння (5) має вигляд

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)\cdot\vec{N}=0\,.$$

З останнього рівняння випливає, що всі точки, координати яких задовольняють цьому рівнянню, а отже і рівносильному йому рівнянню (1), заповнюють площину, яка проходить через точку $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}\left(A;\, B;\, C\right)$.

Теорему 1 доведено.

Означення 2. Рівняння (1) називається загальним рівнянням площини, а вектор $\vec{N}\left(A;\, B;\, C\right)$ – нормальним вектором площини.

Зауваження 1. Вектор

$$\vec{a}\left(m;\, n;\, p\right)$$

буде паралельним до площини (1) тоді і тільки тоді, коли він перпендикулярний до нормального вектора $\vec{N}(A;\,B;\,C)$ цієї площини, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{N}=0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0\,. \qquad (6)$$

Отже, рівність (6) є необхідною і достатньою умовою паралельності вектора $\vec{a}$ і площини (1).

Зауваження 2. Легко перевірити, що вектори

$$\vec{a}_1(B;\,-A;\,0),\ \vec{a}_2(C;\,0;\,-A),\ \vec{a}_3(0;\,C;\,-B)$$

паралельні до площини (1).

Дійсно,

$$\vec{a}_1\cdot\vec{N}=AB-BA+0=0\,;\quad \vec{a}_2\cdot\vec{N}=AC+0-CA=0\,;\quad \vec{a}_3\cdot\vec{N}=0+BC-CB=0\,.$$

§2. Дослідження загального рівняння площини

У загальному рівнянні площини α деякі з коефіцієнтів можуть дорівнювати нулю. Вияснимо, як це впливає на розміщення площини α у просторі.

Розглянемо наступні випадки:

1º. Нехай $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D=0$. Тоді загальне рівняння площини α приймає вигляд

$$Ax+By+Cz=0\,. \qquad (1)$$

Координати точки $O(0;\,0;\,0)$ задовольняють рівнянню (1), тому площина α проходить через початок координат (рис. 1)

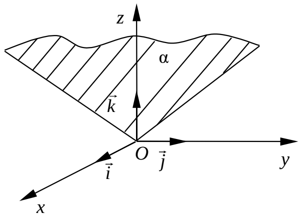

Рис. 1

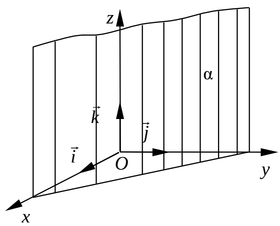

Рис. 2

2º. Нехай $A\neq 0$, $B\neq 0$, $D\neq 0$, $C=0$. Тоді загальне рівняння площини прийме вигляд

$$Ax+By+D=0\,. \qquad (2)$$

Нормальним вектором площини (2) є вектор $\vec{N}(A;\, B;\, 0)$. У цьому випадку вектор $\vec{k}(0;\, 0;\, 1)$ буде паралельним до площини (2), оскільки умова (6) §1 виконується. Дійсно,

$$\vec{N}\cdot\vec{k} = A\cdot 0 + B\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0\,.$$

Отже, площина (2) і вектор $\vec{k}$ паралельні. Але оскільки ця площина не проходить через початок координат $(D \neq 0)$, то вона паралельна до осі Oz (рис. 2).

3°. Нехай $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, $B = 0$. Тоді загальне рівняння площини набуває вигляду

$$Ax + Cz + D = 0\,. \tag{3}$$

Ця площина паралельна вектору $\vec{j}(0;\, 1;\, 0)$, оскільки

$$\vec{N}\cdot\vec{j} = A\cdot 0 + 0\cdot 1 + C\cdot 0 = 0\,.$$

Крім цього, $D \neq 0$. Тому площина (3) паралельна осі Oy (рис. 3).

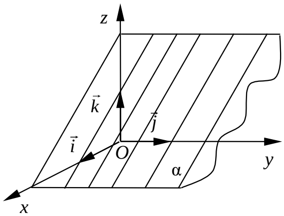

Рис. 3

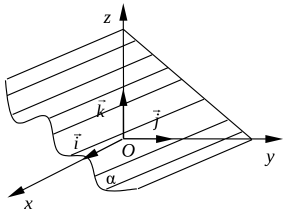

Рис. 4

4°. Нехай $B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0,\ A = 0$. Тоді площина визначається рівнянням

$$By + Cz + D = 0 \tag{4}$$

і паралельна осі Ox (рис. 4).

5°. Якщо у випадках 2°, 3°, 4° умову $D \neq 0$ замінити на умову $D = 0$, то отримаємо рівняння площини α відповідно

$$Ax + By = 0\,, \tag{5}$$

$$Ax + Cz = 0\,, \tag{6}$$

$$By + Cz = 0\,. \tag{7}$$

Оскільки $D=0$, то площина (5) проходить через вісь Oz (рис. 5),

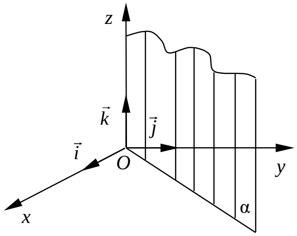

Рис. 5

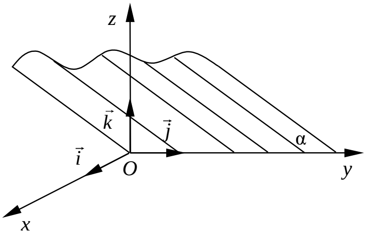

Рис. 6

площина (6) – через вісь Oy (рис. 6), а площина (7) – через вісь Ox (рис. 7).

6°. Нехай $A \neq 0,\ B=0,\ C=0,\ D \neq 0$. Тоді рівняння площини α має вигляд

$$Ax+D=0. \tag{8}$$

У цьому випадку вектори $\vec{j}$ і $\vec{k}$ паралельні до площини α. Оскільки ця площина не проходить через початок координат $(D \neq 0)$, то вона паралельна координатній площині yOz (рис. 8).

7°. Якщо $A=0,\ B \neq 0,\ C=0,\ D \neq 0$, то площина

$$By+D=0 \tag{9}$$

не проходить через початок координат і паралельна координатній площині xOz (рис. 9).

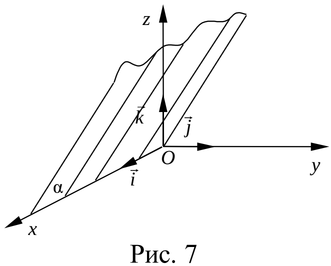

Рис. 7

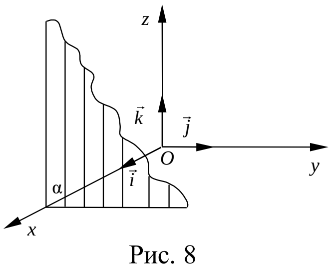

Рис. 8

8°. У випадку $A=0,\ B=0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$ отримуємо площину α

$$Cz+D=0, \tag{10}$$

паралельну координатній площині xOy (рис. 10).

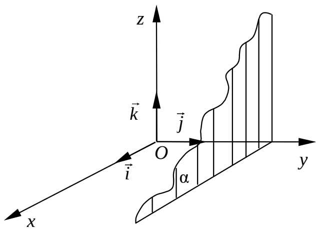

Рис. 9

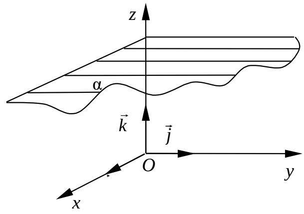

Рис. 10

9^{o}. Якщо у випадках 6^{o}, 7^{o}, 8^{o} покласти $D=0$, то рівняння площини α прийме вигляд відповідно

$$Ax=0 \Leftrightarrow x=0, \tag{11}$$

$$By=0 \Leftrightarrow y=0, \tag{12}$$

$$Cz=0 \Leftrightarrow z=0. \tag{13}$$

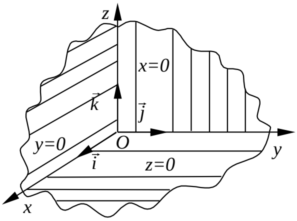

Рис. 11

Площина (11) є координатною площиною yOz, площина (12) – координатною площиною xOz, а площина (13) – координатною площиною xOy (рис. 11).

§3. Рівняння площини у відрізках. Сліди площини на координатних площинах

3.1. Нехай у рівнянні площини α

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

всі коефіцієнти відмінні від нуля. Геометрично це означає, що площина α перетинає всі три координатні осі і не проходить через початок координат. Покладаючи по черзі: 1) $y=z=0$; 2) $x=z=0$; 3) $x=y=0$, знаходимо точки перетину площини α з координатними осями. Такими точками будуть відповідно точки

$$M_1\left(-\frac{D}{A};\,0;\,0\right),\quad M_2\left(0;\,-\frac{D}{B};\,0\right),\quad M_3\left(0;\,0;\,-\frac{D}{C}\right).$$

Перетворимо рівняння (1) наступним чином:

$$Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz=-D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1, \qquad (2)$$

де $p=-\frac{D}{A}$, $q=-\frac{D}{B}$, $r=-\frac{D}{C}$.

Означення 1. Рівняння (2) площини α називається рівнянням площини у відрізках.

Геометричний зміст коефіцієнтів рівняння (2) полягає в наступному: числа p, q і r є відповідно абсцисою, ординатою і аплікатою точок перетину площини α відповідно з осями Ox, Oy і Oz, тобто точок

$$M_1(p;\,0;\,0),\ M_2(0;\,q;\,0) \text{ і } M_3(0;\,0;\,r).$$

Приклад 1. Дано площину

$$2x+3y+4z-12=0\ .$$

Знайти рівняння цієї площини у відрізках і побудувати її ескіз.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння до вигляду (2):

$$2x+3y+12z=12 \Leftrightarrow \frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{4z}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1\ .$$

Останнє рівняння є рівнянням заданої площини у відрізках. Будуємо точки $M_1(6;\,0;\,0)$, $M_2(0;\,4;\,0)$, $M_3(0;\,0;\,3)$ і проводимо через них площину (рис. 1).

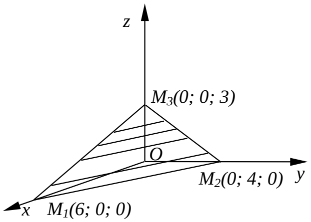

Рис. 1

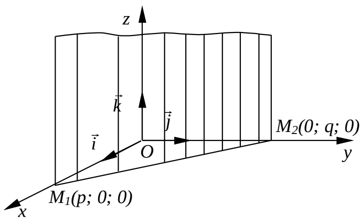

Рис. 2

Зауваження 1. Якщо один з коефіцієнтів A, B, C дорівнює нулю, наприклад, $C=0$, то замість рівняння (2) отримуємо рівняння

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \qquad (3)$$

де p і q мають той же самий геометричний зміст, що і в рівнянні (2). Рівняння (3) визначає площину α, яка паралельна осі Oz і перетинає осі Ox і Oy відповідно у точках $M_1(p;\,0;\,0)$ і $M_2(0;\,q;\,0)$ (рис. 2). Аналогічно записуються рівняння площини для випадків, коли $A=0$ або $B=0$.

Зауваження 2. Якщо площина проходить через початок координат, тобто $D=0$, то всі три точки перетину її з осями координат співпадають з $O(0;\,0;\,0)$. Щоб побудувати таку площину, потрібно взяти ще які-небудь дві точки, що належать цій площині. Найпростіше взяти точки, які лежать на координатних площинах, і через ці дві точки і точку O побудувати ескіз площини.

Приклад 2. Побудувати ескіз площини

$$x+y-z=0\ .$$

Розв'язання. Нехай $x=0$, $y=1$. Тоді $z=1$. Якщо $x=1$, $y=0$, то $z=1$. Через точки $O(0;\,0;\,0)$, $M_1(0;\,1;\,1)$ і $M_2(1;\,0;\,1)$ проводимо площину α (рис. 3).

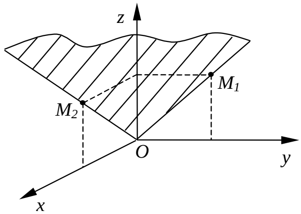

Рис. 3

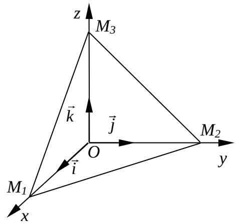

Рис. 4

3.2. **<u>Означення 2</u>**. Прямі перетину площини (1) з координатними площинами називаються слідами цієї площини на координатних площинах (рис. 4).

Рівняння прямої M_1M_2, по якій задана площина α перетинається з площиною xOy, отримуємо як рівняння геометричного місця точок, координати яких одночасно задовольняють як рівнянню заданої площини α, так і рівнянню площини xOy. Оскільки площина xOy має рівняння $z=0$, то для запису рівняння сліду M_1M_2 потрібно у рівнянні заданої площини α покласти $z=0$.

Отже, рівняння сліду M_1M_2 заданої площини α на площині xOy мають вигляд

$$\begin{cases} Ax+By+D=0 \\ z=0. \end{cases} \tag{4}$$

Перше з рівнянь (4) визначає площину, паралельну осі Oz, а друге рівняння вказує не те, що на цій площині розглядаються точки, які належать площині xOy. У площині xOy перше з рівнянь (4) визначає пряму M_1M_2.

Аналогічно, рівняння

$$\begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

визначають слід M_1M_3 площини α на площині xOz, а рівняння

$$\begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases} \; -$$

слід M_2M_3 площини α на площині yOz.

§4. Взаємне розміщення двох площин

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини своїми рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

За рівняннями (1) і (2) будемо визначати взаємне розміщення цих площин, тобто коли вони паралельні, коли співпадають і коли перетинаються.

Використовуючи поняття слідів площини на координатних площинах, умови паралельності, співпадання та перетину площин (1) і (2) легко отримати з раніше вивчених відповідних умов для двох прямих на площині (див. §4 гл. XIII). Площини (1) і (2) будуть паралельними, співпадати або перетинатися тоді і тільки тоді, коли будуть відповідно паралельними, співпадати або перетинатися їх сліди на координатних площинах (рис. 1).

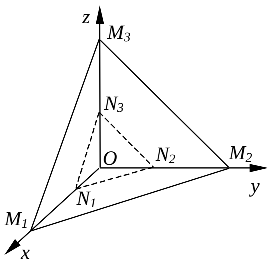

Рис. 1

Сліди площин (1) і (2) на площині xOy позначимо відповідно через M_1M_2 і N_1N_2, на площині xOz – через M_1M_3 і N_1N_3 і на площині yOz – через M_2M_3 і N_2N_3 (рис. 1).

Умовою паралельності слідів M_1M_2 і N_1N_2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} A_2x + B_2y + D_2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

є умова

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \qquad (3)$$

Аналогічно, умовою паралельності слідів M_1M_3 і N_1N_3

$$\begin{cases} A_1x + C_1z + D_1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} A_2x + C_2z + D_2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

є умова

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}, \tag{4}$$

а умовою паралельності слідів M_2M_3 і N_2N_3

$$\begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} -$$

умова

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \tag{5}$$

З рівностей (3), (4) і (5) випливають необхідні і достатні умови паралельності площин (1) і (2):

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}. \tag{6}$$

За тією ж схемою знаходяться необхідні і достатні умови співпадання та перетину площин (1) і (2). Тому, опустивши викладки, наведемо лише результати.

Для співпадання двох площин (1) і (2) необхідно і достатньо співпадання їх слідів. Умова співпадання слідів дає

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \tag{7}$$

Рівності (7) є необхідними і достатніми умовами співпадання площин (1) і (2).

Для перетину двох площин (1) і (2) необхідно і достатньо перетину їх слідів. Умовою перетину слідів є виконання хоча б однієї з трьох нерівностей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Отже, виконання хоча б однієї з трьох нерівностей (8) є необхідною і достатньою умовою перетину площин (1) і (2).

Задача про взаємне розміщення двох площин з алгебраїчної точки зору зводиться до дослідження системи двох рівнянь (1) і (2) з трьома невідомими x, y, z. У загальному випадку така задача розв’язувалась нами у §2 гл. IX.

Необхідною і достатньою умовою сумісності системи рівнянь (1), (2) є за теоремою Кронекера-Капеллі рівність

$$rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix},$$

де символом $rang$ позначено ранг матриці.

Резюмуючи викладене вище, приходимо до справедливості наступних теорем.

Теорема 1. Для того щоб площини (1) і (2) перетинались, необхідно і достатньо виконання будь-якої з наступних умов:

1º. Хоча б один з визначників

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

2º. Нормальні вектори $\vec{N}_1\left(A_1; B_1; C_1\right)$ і $\vec{N}_2\left(A_2; B_2; C_2\right)$ даних площин неколінеарні.

3º. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$.

Теорема 2. Необхідною і достатньою умовою паралельності площин (1) і (2) є виконання однієї з трьох умов:

1º. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$,

але хоча б один з визначників $\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю.

2º. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ даних площин колінеарні, але

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}.$$

3º. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$, $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2$.

Теорема 3. Для того щоб площини (1) і (2) співпадали, необхідно і достатньо виконання однієї з трьох умов:

1º. $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$.

2°. Нормальні вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ площин (1) і (2) колінеарні і $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$.

3°. $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1$.

§5. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам

5.1. Нехай задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій. За цієї умови задані точки визначають одну і тільки одну площину α, яка через них проходить. Знайдемо рівняння цієї площини.

Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка простору (рис. 1). Введемо радіуси вектори точок M_1, M_2, M_3, M:

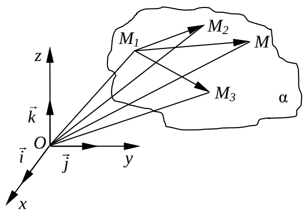

Рис. 1

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}(x_2; y_2; z_2)$,

$\vec{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}(x_3; y_3; z_3)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x; y; z)$.

Якщо точка M лежить у площині α, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні і навпаки, якщо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні, то точка M лежить у площині α. Умовою компланарності цих трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow (\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_2-\vec{r}_1)(\vec{r}_3-\vec{r}_1) = 0. \qquad (1)$$

Зауваження 1. Тут і далі мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ позначається послідовним записом цих векторів, тобто $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а не $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, як у §4 гл. VII.

Рівність (1) є необхідною і достатньою умовою того, що точка M лежить у площині α.

Отже, всі точки, радіуси-вектори $\vec{r}$ яких задовольняють рівнянню (1), заповнюють площину, що визначається точками M_1, M_2 і M_3.

Означення 1. Рівняння (1) називається векторним рівнянням площини, що проходить через точки M_1, M_2, M_3.

Врахувавши, що вектори $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ і $\vec{r}_3-\vec{r}_1$ мають координати відповідно

$$\left(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\right),\quad \left(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\right)\ \text{і}\ \left(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\right),$$

перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,. \tag{2}$$

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, отримуємо

$$\left(x-x_1\right)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}-\left(y-y_1\right)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}+\left(z-z_1\right)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0$$

або

$$A\left(x-x_1\right)+B\left(y-y_1\right)+\left(z-z_1\right)=0\,, \tag{3}$$

де

$$A=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix},$$

причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля, оскільки за умовою вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ не паралельні.

Рівняння (3) можна подати у вигляді

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \tag{4}$$

де $D=-\left(Ax_1+By_1+Cz_1\right)$.

Рівняння (4) є шуканим рівнянням площини α (у координатній формі), що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3.

5.2. Запишемо рівняння площини, що проходить через задану точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Відкладемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ від точки M_1, яка лежить у площині α (рис. 2).

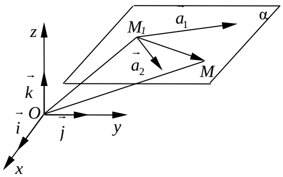

Рис. 2

Для того щоб довільна точка $M\left(x;\ y;\ z\right)$ лежала у площині α, необхідно і достатньо, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ були компланарними, тобто

$$\overrightarrow{M_1M}\,\vec{a}_1\,\vec{a}_2=0 \Leftrightarrow \left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\vec{a}_1\,\vec{a}_2=0\,, \tag{5}$$

де $\vec{r}=\overrightarrow{OM}\left(x;\ y;\ z\right)$, $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1}\left(x_1;\ y_1;\ z_1\right)$.

Отже, всі точки, радіуси-вектори яких задовольняють рівнянню (5), заповнюють площину α, яка проходить через задану точку M_1 паралельно заданим неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

<u>Означення 2</u>. Рівняння (5) називається векторним рівнянням цієї площини α.

Запишемо рівняння (5) у координатній формі. Нехай вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ задано своїми координатами

$$\vec{a}_1(m_1; n_1; p_1), \quad \vec{a}_2(m_2; n_2; p_2).$$

Тоді рівняння (5) перепишеться так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \qquad (6)$$

Розкриваючи визначник рівняння (6) за елементами першого рядка, ми отримаємо загальне рівняння площини α, що проходить через точку M_1 паралельно неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

§6. Параметричні рівняння площини

Площина α визначається однозначно, якщо задано точку M_1, що їй належить, і два неколінеарні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, кожен з яких паралельний до α. Рівняння цієї площини отримано нами у §5 (див. (6) §5). У даному параграфі розглядається параметричне задання площини. Записати параметричні рівняння площини означає виразити координати довільної точки цієї площини через довільні параметри.

Нехай

$$M_1(x_1; y_1; z_1),\ \vec{a}_1(m_1; n_1; p_1),\ \vec{a}_2(m_2; n_2; p_2).$$

Теорема 1. Параметричні рівняння площини, яка проходить через точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, у декартовій прямокутній системі координат мають вигляд

$$x = x_1 + um_1 + vm_2; \quad y = y_1 + un_1 + vn_2; \quad z = z_1 + up_1 + vp_2, \qquad (1)$$

де $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

<u>Доведення</u>. Довільна точка $M(x; y; z)$ простору лежить на площині α тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1; y-y_1; z-z_1)$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ компланарні. Оскільки вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ неколінеарні, то вектор $\overrightarrow{M_1M}$ можна однозначно розкласти за цими векторами, тобто для довільної точки M площини α

існують такі числа u і v, що виконується рівність (рис. 1).

$$\overrightarrow{M_1M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2. \tag{2}$$

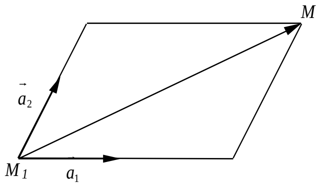

Рис. 1

Навпаки, довільна точка M, для якої справедлива рівність (2) при деяких u і v, лежить на площині α.

У координатній формі рівність (2) приймає вигляд

$$\begin{cases} x - x_1 = um_1 + vm_2 \\ y - y_1 = un_1 + vn_2 \\ z - z_1 = up_1 + vp_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + um_1 + vm_2 \\ y = y_1 + un_1 + vn_2 \\ z = z_1 + up_1 + vp_2. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Змінюючи u і v, ми можемо отримати будь-яку точку M площини α. Зокрема, для $u = v = 0$ отримуємо точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Зміст параметричних рівнянь площини полягає у наступному: якими б не були дійсні числа u і v, точка з координатами x, y, z, що визначаються за формулами (1), лежить у площині α. Навпаки, якщо $(x; y; z)$ – точка площини α, то завжди знайдуться такі числа u і v, що x, y, z будуть виражатись через координати точки M_1 і координати векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ за допомогою формул (1).

Зауваження 1. Рівність (2) є розкладом вектора $\overrightarrow{M_1M}$ у базисі $\{M_1; \vec{a}_1; \vec{a}_2\}$, а параметри u і v – координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ у цьому базисі.

Зауваження 2. Якщо $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіуси-вектори точок M_1 і M_2, то рівність (2) можна записати у вигляді

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2\,. \tag{3}$$

Рівняння (3) є векторно-параметричним рівнянням площини, що проходить через точку M_1 паралельно двом неколінеарним векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

§7. Геометричний зміст нерівності першого степеня з трьома невідомими

Цей параграф повністю аналогічний §10 гл. XIII, в якому розглядалось питання про дві півплощини, що визначаються заданою прямою на площині.

Розглянемо чотиричлен

$$\delta = Ax + By + Cz + D, \tag{1}$$

в якому коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю.

Всі точки $M(x;\, y;\, z)$ простору, координати яких задовольняють рівнянню

$$\delta = Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

заповнюють площину α з нормальним вектором $\vec{N}(A;\, B;\, C)$.

Якщо точка $M(x;\, y;\, z)$ не лежить на площині α, то

$$\delta = Ax + By + Cz + D \neq 0 .$$

Геометричний зміст знака чотиричлена (1) виясняється аналогічно тому, як це було зроблено в §10 гл. XIII.

Площина α розбиває простір на два підпростори, для яких вона є межею.

Аналогічно теоремі 1 §10 гл. XIII доводиться наступна теорема.

Теорема 1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням (2). Тоді для координат x, y, z всіх точок $M(x;\, y;\, z)$, які лежать по один бік від площини α, виконується нерівність

$$Ax + By + Cz + D > 0 , \qquad (3)$$

а для координат x, y, z всіх точок $M(x;\, y;\, z)$, які лежать по інший бік від площини α – нерівність

$$Ax + By + Cz + D < 0. \qquad (4)$$

<u>**Означення 1**</u>. Підпростір, для координат всіх точок якого виконується нерівність (3), називається додатним. Якщо для координат всіх точок підпростору виконується нерівність (4), то він називається від'ємним.

Теорема 2. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням (2). Якщо відкласти нормальний вектор $\vec{N}(A;\, B;\, C) = \overrightarrow{M_0P}$ від довільної точки M_0 площини α, то кінець P цього вектора буде знаходитись у додатному підпросторі даної площини α.

Доведення теореми 2 проводиться за схемою доведення теореми 2 §10 гл. XIII. Наочний зміст наведених вище теорем 1, 2 аналогічний змісту теорем про півплощини, що визначаються на площині заданою прямою.

Для того щоб точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ лежали по один бік (по різні боки) від площини α, необхідно і достатньо, щоб числа

$$\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \quad \text{і} \quad \delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$$

мали один і той же знак (різні знаки).

Множина точок простору належить додатному підпростору площини (2), якщо всі точки цієї множини знаходяться по той же бік від площини (2), що і кінець її нормального вектора $\vec{N}(A;\, B;\, C)$ за умови, що останній прикладено до деякої точки площини (2).

Приклад 1. Нехай w – внутрішня область того двогранного кута, утвореного площинами

$$3x-y+4z+1=0 \quad \text{і} \quad x+y+z-2=0 ,$$

який містить початок координат.

Записати лінійні нерівності, які характеризують область w.

Розв'язання. Скористаємось теоремою 1. У даному випадку

$$\delta_1=3\cdot 0-0+4\cdot 0+1=1>0,\ \delta_2=0+0+0-2=-2<0 .$$

Тому область w характеризується нерівностями

$$\begin{cases} 3x-y+4z+1>0 \\ x+y+z-2<0. \end{cases}$$

Приклад 2. Записати нерівності, які характеризують внутрішню область w трикутної призми $AOBA_1O_1B_1$, зображеної на рис. 1, якщо $A(3;0;0)$, $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $A_1(3;0;5)$, $O_1(0;0;5)$, $B_1(0;2;5)$.

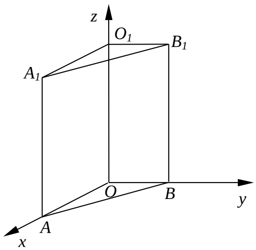

Рис. 1

Розв'язання. Призма обмежена п'ятьма площинами $A_1O_1B_1$, AOB, AA_1O_1O, BB_1O_1O і ABB_1A_1.

Запишемо рівняння всіх цих площин:

$A_1O_1B_1 \to z=5;\quad BB_1O_1O \to x=0;\quad AOB \to z=0;$

$ABB_1A_1 \to \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1;\quad AA_1O_1O \to y=0.$

Область w розміщена між паралельними площинами $A_1O_1B_1$ і AOB, тому для всіх точок w маємо: $0<z<5 \Leftrightarrow z(z-5)<0$. Точки області w лежать по той же бік від площини ABB_1A_1, що і початок координат, тому $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-1<0$.

Аналогічно отримуємо ще дві нерівності: $y>0$ і $x>0$. Отже, область w характеризується нерівностями

$$z(z-5)<0;\quad y>0;\ x>0;\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1<0 .$$

§8. Формула для обчислення відстані від точки до площини. Нормальне рівняння площини

8.1. Нехай у декартовій прямокутній системі координат площину α задано загальним рівнянням

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

або рівнянням у векторній формі

$$\vec{r}\cdot\vec{N}+D=0, \qquad (2)$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радіус-вектор змінної точки $M(x; y; z)$ площини α, а $\vec{N}(A; B; C)$ – нормальний вектор цієї площини. Знайдемо відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до площини α (рис. 1).

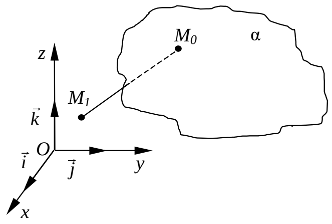

Рис. 1

Позначимо через M_0 основу перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину α. Шукана відстань d дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$. Якщо $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ – радіус-вектор точки M_1, то повторюючи дослівно міркування §7 гл. XIII, отримуємо векторну рівність

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D}{\left|\vec{N}\right|^2} \vec{N}, \tag{3}$$

звідки випливає, що

$$d = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|^2} \left|\vec{N}\right| = \frac{\left|\vec{r}_1 \cdot \vec{N} + D\right|}{\left|\vec{N}\right|} \tag{4}$$

або в координатній формі

$$d = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{5}$$

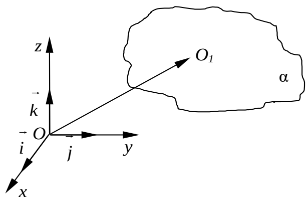

Рис. 2

Розглянемо частинний випадок, коли точка M_1 співпадає з початком координат O (рис. 2). Ортогональну проекцію точки O на площину α позначимо через O_1. Тоді з формули (3) отримуємо

$$\overrightarrow{O_1O} = \frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2} \vec{N} \tag{6}$$

і для відстані d_0 від початку координат до площини α можна записати

$$d_0 = \left|\overrightarrow{O_1O}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|^2} \left|\vec{N}\right| = \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{7}$$

що безпосередньо випливає і з формули (4) або (5).

8.2. Нехай площина (1) не проходить через початок координат, тобто $D \neq 0$.

<u>**Означення 1**</u>. Одиничний вектор $\vec{n}_0$, перпендикулярний до площини α і напрямлений від початку координат до цієї площини, називається одиничним вектором нормалі.

З формул (6) і (7) випливає, що

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\left|\overrightarrow{OO_1}\right|} = -\frac{D}{\left|\vec{N}\right|^2}\vec{N} : \frac{|D|}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|}\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (8)$$

Тоді

$$\vec{n}_0 = -\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – додатне число і}$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}, \text{ якщо } D \text{ – від'ємне число.}$$

Повторюючи хід міркувань §7 гл. XIII, приходимо до наступного висновку. Якщо обидві частини рівняння (1) або (2) помножити на нормувальний множник

$$\lambda_0 = -\frac{D}{|D|}\frac{1}{\left|\vec{N}\right|} = -\frac{D}{|D|\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (9)$$

то будемо мати нормальне рівняння площини

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - d_0 = 0 \qquad (10)$$

або в координатній формі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_0 = 0, \qquad (11)$$

де α, β, γ – кути, які утворює одиничний вектор нормалі з додатними напрямками осей координат.

Без будь-яких змін на випадок площини переносяться зауваження 1 і 2 §7 гл. XIII.

Приклад 1. Скласти рівняння площини α, яка паралельна даній площині

$$2x + 2y - z - 11 = 0, \qquad (12)$$

якщо відомо, що відстань між цими площинами дорівнює 5; крім цього, шукана площина і точка $M_1(1;\, 2;\, 4)$ знаходяться по різні боки від заданої площини (12).

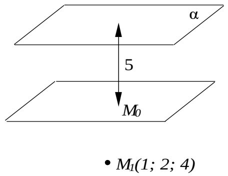

Рис. 3

Розв'язання. Шукана площина α буде мати рівняння

$$2x+2y-z+D=0\ ,\ D\neq -11. \tag{13}$$

Нехай $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ – довільна точка заданої площини (12), тобто

$$2x_0+2y_0-z_0-11=0 \Leftrightarrow 2x_0+2y_0-z_0=11\,. \tag{14}$$

Відстань від точки $M_0\left(x_0;\, y_0;\, z_0\right)$ до шуканої площини (13) дорівнює 5, тобто

$$5=\frac{\left|2x_0+2y_0-z_0+D\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\left|2x_0+2y_0-z_0+D\right|}{3}\,. \tag{15}$$

Підставимо у рівність (15) рівність (14):

$$15=\left|11+D\right| \Leftrightarrow 11+D=\pm 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D_1=4 \\ D_2=-26. \end{array}\right.$$

Отже, маємо дві площини

$$2x+2y-z+4=0\,, \tag{16}$$

$$2x+2y-z-26=0. \tag{17}$$

Вияснимо, яка з площин (16) чи (17) задовольняє умові задачі. Для цього знайдемо знак чотиричлена, що визначається заданою площиною (12), у точці $M_1\left(1;\, 2;\, 4\right)$:

$$\delta\left(M_1\right)=2\cdot 1+2\cdot 2-4-11<0\,.$$

Нехай $M_2\left(x_2;\, y_2;\, z_2\right)$ – довільна точка площини (16) або (17), тобто

$$2x_2+2y_2-z_2+4=0 \Leftrightarrow 2x_2+2y_2-z_2=-4 \tag{18}$$

або

$$2x_2+2y_2-z_2-26=0 \Leftrightarrow 2x_2+2y_2-z_2=26\,. \tag{19}$$

Для точки M_2 за умовою задачі маємо: $\delta\left(M_2\right)>0$. Перевіримо, яка з площин (16) чи (17) задовольняє цій умові.

Для точки M_2 площини (16)

$$\delta\left(M_2\right)=2x_2+2y_2-z_2-11\,. \tag{20}$$

Підставляючи в (20) рівність (18), отримуємо

$$\delta\left(M_2\right)=-4-11=-15<0\,.$$

Тому площина (16) не задовольняє умові задачі.

Для точки M_2 площини (17)

$$\delta\left(M_2\right)=2x_2+2y_2-z_2-11=26-11=15>0\,.$$

Отже, шуканою площиною є площина

$$2x+2y-z-26=0. \tag{21}$$

Приклад 2. Написати рівняння площини, яка ділить пополам той двогранний кут між площинами

$$3x-4y-z+5=0, \tag{22}$$

$$4x-3y+z+5=0, \tag{23}$$

в якому міститься початок координат.

Розв'язання. Оскільки в рівняннях (22) і (23) $D\neq 0$, то площини (22) і (23) не проходять через початок координат.

Розв'язання даного прикладу аналогічне розв'язанню прикладу 3 §11 гл. XIII.

Площину α, яка ділить двогранний кут пополам, називають бісекторною площиною. Нехай $M(X;Y;Z)$ – довільна точка бісекторної площини. Тоді відстані від точки $M(X;Y;Z)$ до площин (22) і (23) рівні, тобто

$$\frac{|3X-4Y-Z+5|}{\sqrt{9+16+1}}=\frac{|4X-3Y+Z+5|}{\sqrt{16+9+1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3X-4Y-Z+5=\pm(4X-3Y+Z+5). \tag{24}$$

Підставляючи координати початку координат O в рівняння (22) і (23), отримуємо відповідно

$$\delta_1(O)=3\cdot 0-4\cdot 0-0+5>0,\ \delta_2(O)=4\cdot 0-3\cdot 0+0+5>0.$$

Оскільки $\delta_1(O)>0$ і $\delta_2(O)>0$, то у правій частині рівності (24) потрібно брати знак "+".

Отже, рівнянням шуканої бісекторної площини є рівняння

$$3X-4Y-Z+5=4X-3Y+Z+5\Leftrightarrow X+Y+2Z=0.$$

Запишемо це рівняння у звичних позначеннях змінних координат

$$x+y+2z=0.$$

§9. Знаходження кута між двома площинами

Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано дві площини

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{2}$$

Якщо ці площини перетинаються, то вони утворюють чотири двогранних кути. Позначимо величини цих кутів через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (рис. 1).

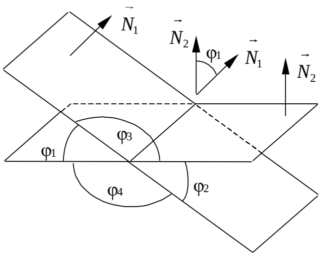

Рис. 1

Оскільки $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_3 = \varphi_4$ і $\varphi_1 + \varphi_3 = 180^0$, то достатньо знайти один з цих кутів. Кут між двома площинами вимірюється, як відомо, лінійним кутом двогранного кута, одного з двох, утворених цими площинами. Його можна виміряти кутом між векторами, перпендикулярними до заданих площин, тобто кутом між нормальними векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (рис. 1). Позначимо кут між площинами буквою φ. Тоді

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}\right) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3)$$

Формула може давати знак плюс або знак мінус. У першому випадку ми отримаємо гострий кут між площинами (1) і (2), а у другому – кут, який доповнює перший до 180^0.

Якщо ми хочемо знайти гострий кут між двома площинами, то для $\cos\varphi$ слід брати додатне число, тобто користуватись формулою

$$\cos\varphi = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|. \quad (4)$$

Якщо площини (1) і (2) перпендикулярні, то вектори $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ також перпендикулярні. Тому скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (5)$$

Навпаки, якщо виконується умова (5), то площини (1) і (2) перпендикулярні.

Приклад 1. Визначити той двогранний кут, утворений площинами

$$2x - y + 2z - 3 = 0, \quad (6)$$
$$6x + 2y - 3z + 8 = 0, \quad (7)$$

всередині якого розміщена точка $M_0(1; 1; 8)$.

Розв'язання. Нормальними векторами даних площин є вектори

$$\vec{N}_1(2; -1; 2) \text{ і } \vec{N}_2(6; 2; -3).$$

Дослідимо розміщення цих векторів і точки M_0 відносно площин (6) і (7). Оскільки в результаті підстановки координат точки M_0 у ліву частину рівняння (6) отримується додатне число, а у ліву частину рівняння (7) – від'ємне число, то вектори

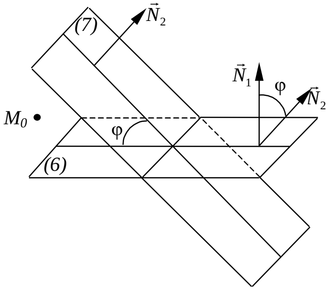

Рис. 2

$\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ (див. §7) розміщені так, як показано на рис. 2, тобто всередині кута, що не містить точку M_0. Шуканий кут φ дорівнює куту між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 6 - 1\cdot 2 + 2(-3)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{36+4+9}} = \frac{4}{21}.$$

§10. Пучок площин

Розглянемо дві площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{2}$$

які перетинаються по прямій l.

<u>**Означення 1**</u>. Множину всіх площин, які проходять через пряму l, називають пучком площин. Пряму l називають віссю пучка.

Наша задача полягає у знаходженні загального рівняння, що визначає пучок площин з віссю l. Ця задача розв'язується шляхом доведення теореми, аналогічної теоремі 2 §5 гл. XIII.

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат пучок площин w задано двома площинами (1) і (2), які перетинається, то рівняння

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0, \tag{3}$$

де λ і μ можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає даний пучок w.

<u>*Доведення*</u>. Насамперед доведемо, що рівняння (3) є лінійним рівнянням щодо змінних x, y, z. Для цього запишемо його у вигляді

$$\left(\lambda A_1 + \mu A_2\right)x + \left(\lambda B_1 + \mu B_2\right)y + \left(\lambda C_1 + \mu C_2\right)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0. \tag{4}$$

Рівняння (4) рівносильне рівнянню (3). Коефіцієнти при x, y, z цього рівняння не можуть одночасно дорівнювати нулю. Дійсно, нехай

$$\lambda A_1 + \mu A_2 = 0,\ \lambda B_1 + \mu B_2 = 0,\ \lambda C_1 + \mu C_2 = 0. \tag{5}$$

Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\mu \neq 0$, оскільки λ і μ одночасно не дорівнюють нулю. Тоді рівності (5) запишуться так:

$$A_2 = -\frac{\lambda}{\mu}A_1,\ B_2 = -\frac{\lambda}{\mu}B_1,\ C_2 = -\frac{\lambda}{\mu}C_1. \tag{6}$$

З рівностей (6) випливає, що площини (1) і (2) паралельні. Але це суперечить умові їх перетину.

Отже, рівняння (4), а разом з ним і рівняння (3) є лінійним рівнянням відносно змінних x, y, z, а тому для довільних значень λ і μ, не рівних одночасно нулю, визначає площину.

Покажемо, що площина (3) проходить через пряму l – лінію перетину площин (1) і (2). Дійсно, нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є довільною точкою прямої l. Тоді її координати задовольняють обом рівнянням (1) і (2):

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0,\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0. \qquad (7)$$

Але тоді координати точки M_0 будуть задовольняти і рівнянню (3), оскільки у цьому рівнянні вирази, що стоять у дужках, згідно з рівностями (7) перетворюються в нуль.

При $\mu = 0$ з рівняння (3) отримуємо рівняння площини (1), а при $\lambda = 0$ – рівняння площини (2).

Надаючи інші значення числам λ і μ, будемо отримувати інші площини, які проходять через пряму l. Доведемо, що таким чином ми отримаємо всі площини, що проходять через l.

Нехай α – довільна площина, відмінна від площин (1), (2) і така, що проходить через пряму l і деяку точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка не лежить на цій прямій. Покажемо, що при певних значеннях λ і μ площина α визначається рівнянням (3), тобто виділимо з пучка w потрібну нам площину.

Підставимо координати точки M_1 в рівняння (3) і виберемо λ і μ такими, щоб воно стало тотожністю. Тоді рівняння (3) при таких λ, μ і буде рівнянням площини α, яка проходить через точку M_1 і пряму l. Цими умовами площина визначається однозначно.

У відповідності до нашого плану з тотожності

$$\lambda\left(A_1x_1 + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x_1 + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0,$$

де вирази в дужках не дорівнюють нулю (площини (1) і (2) не проходять через точку M_1), знаходимо

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2} \Leftrightarrow \mu = \lambda p,$$

де

$$p = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}.$$

Підставимо λ і $\mu = \lambda p$ в рівняння (3). При цих значеннях параметрів λ і μ (λ – довільне) рівняння (3) визначає площину α.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо поділити рівняння (3) на λ і покласти $\tau = \dfrac{\mu}{\lambda}$, то рівнянню пучка площин можна надати більш зручної форми, яка містить лише один параметр:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \tau\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 . \tag{8}$$

Проте слід пам'ятати, що з рівняння (8) не можна отримати рівняння (2) другої з площин, які визначають пучок w, оскільки для цього потрібно покладати $\lambda = 0$.

Приклад 1. Написати рівняння площини α, яка проходить через лінію перетину площин

$$x + y + z - 3 = 0, \tag{9}$$

$$x - y - z + 1 = 0 \tag{10}$$

паралельно осі Ox.

Розв'язання. Площина α належить пучку, що визначається площинами (9) і (10), і тому має рівняння

$$\begin{gathered}\lambda\left(x + y + z - 3\right) + \mu\left(x - y - z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\lambda + \mu\right)x + \left(\lambda - \mu\right)y + \left(\lambda - \mu\right)z - 3\lambda + \mu = 0 .\end{gathered} \tag{11}$$

За умовою площина α паралельна осі Ox. Тому в рівнянні (11) має дорівнювати нулю коефіцієнт при x, тобто

$$\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda . \tag{12}$$

Підставимо значення μ з (12) в рівняння (11):

$$2\lambda y + 2\lambda z - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow y + z - 2 = 0 . \tag{13}$$

Отже, рівнянням площини α є рівняння (13).

Теорема 2. Для того щоб три площини

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{14}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{15}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \tag{16}$$

належали до одного і того ж пучка, необхідно і достатньо, щоб існували такі три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні одночасно нулю, для яких відносно змінних x, y, z має місце тотожність

$$\begin{gathered}\lambda_1\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \lambda_2\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) + \\ + \lambda_3\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3\right) \equiv 0 .\end{gathered} \tag{17}$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай площини (14), (15), (16) належать до одного пучка. Покажемо, що існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (17). Дійсно, у цьому випадку одна з площин (14), (15) або (16), наприклад, (16) належить пучку, що визначається двома іншими площинами. Тому

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lambda\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\mu\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+$$
$$+(-1)\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0\,.$$

Отже, тотожність (17) виконується при $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\mu$, $\lambda_3=-1$ і необхідність доведено.

Достатність. Нехай існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, не рівні нулю одночасно, для яких справедлива тотожність (17). Покажемо, що площини (14), (15) і (16) належать до одного і того ж пучка. Дійсно, якщо $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – деяка трійка чисел, для яких справедлива тотожність (17), то два з них, наприклад, λ_2 і λ_3 не дорівнюють нулю одночасно, оскільки у противному разі мала б місце тотожність

$$\lambda_1\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)=0$$

при $\lambda_1\neq 0$, що неможливо. Тому тотожність (17) можна переписати у вигляді

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\frac{\lambda_1}{-\lambda_3}\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\frac{\lambda_2}{-\lambda_3}\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right),$$

звідки випливає, що площина (16) належить до пучка, який породжується першими двома площинами (14) і (15).

Теорему доведено.

§11. В’язка площин

Означення 1. Множину всіх площин простору, які проходять через задану точку M_0, називають в’язкою площин. Точку M_0 називають центром в’язки.

Якщо у просторі вибрано декартову прямокутну систему координат, то в’язку площин можна задати або координатами центра, або трьома площинами, які перетинаються в одній єдиній точці – центрі в’язки. Розглянемо кожен з цих випадків.

Нехай задано точку $M_0\left(x_0;\,y_0;\,z_0\right)$. Візьмемо яку-небудь площину

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1}$$

що проходить через цю точку. Тоді

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right). \tag{2}$$

Підставимо (2) в (1):

$$Ax+By+Cz-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\,. \tag{3}$$

Надаючи параметрам A, B, C різних значень, будемо отримувати різні площини в'язки з центром у точці M_0. Позначимо $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$. Тоді рівняння в'язки запишеться у вигляді

$$\lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(y - y_0) + \lambda_3(z - z_0) = 0 . \tag{4}$$

Теорема 1. Якщо у декартовій прямокутній системі координат дано в'язку площин з центром $(x_0; y_0; z_0)$, то рівняння (4), де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ можуть приймати довільні значення, не рівні одночасно нулю, визначає цю в'язку.

Доведення. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні числа, не рівні одночасно нулю. Тоді рівняння (4) є лінійним рівнянням, якому задовольняють числа $x = x_0$, $y = y_0$ і $z = z_0$. Тому воно визначає площину, що має нормальний вектор $\vec{N}_1(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ і проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, тобто деяку площину в'язки.

Навпаки, нехай α – деяка площина в'язки, нормальний вектор $\vec{N}$ якої має координати $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$. Тоді, оскільки α проходять через точку $(x_0; y_0; z_0)$, рівняння цієї площини запишеться у вигляді (4).

Теорему доведено.

Нехай тепер центр в'язки – точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ визначається як єдина точка перетину трьох площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{5}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{6}$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \tag{7}$$

Теорема 2. Якщо у декартовій прямокутній системі координат в'язку площин задано трьома площинами (5), (6) і (7), що перетинаються в одній єдиній точці, то рівняння

$$\begin{gathered}\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 ,\end{gathered} \tag{8}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ приймають довільні значення, не рівні нулю одночасно, визначає дану в'язку.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 §10.

У рівнянні (8) завжди можна перейти від трьох параметрів до двох. Дійсно, розділивши рівняння (8) на один з трьох параметрів (наприклад, на λ_3), який відмінний від нуля, отримаємо рівносильне йому рівняння

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + (A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \cdot$$

Кожна з площин (5), (6), (7) належить до в'язки, заданої рівнянням (8). Площина (5) отримується з (8), якщо $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; площина (6) – якщо $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$; площина (7) – якщо $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Теорема 3. Для того щоб чотири площини

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \tag{9}$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \tag{10}$$
$$A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0, \tag{11}$$
$$A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0, \tag{12}$$

три з яких перетинаються в одній точці, належали до однієї в'язки площин, необхідно і достатньо, щоб визначник 4-го порядку, складений з коефіцієнтів цих рівнянь, дорівнював нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 . \tag{13}$$

Доведення. Необхідність. Покажемо, що для площин (9), (10), (11), (12), які належать до однієї в'язки $\Delta = 0$. Дійсно, нехай ці площини належать до однієї в'язки з центром $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$. Тоді

$$\begin{gathered} A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0 \Leftrightarrow D_1 = A_1\left(-x_0\right) + B_1\left(-y_0\right) + C_1\left(-z_0\right), \\ A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0 \Leftrightarrow D_2 = A_2\left(-x_0\right) + B_2\left(-y_0\right) + C_2\left(-z_0\right), \\ A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + D_3 = 0 \Leftrightarrow D_3 = A_3\left(-x_0\right) + B_3\left(-y_0\right) + C_3\left(-z_0\right), \\ A_4 x_0 + B_4 y_0 + C_4 z_0 + D_4 = 0 \Leftrightarrow D_4 = A_4\left(-x_0\right) + B_4\left(-y_0\right) + C_4\left(-z_0\right). \end{gathered} \tag{14}$$

З рівностей (14) випливає, що елементи $4^{\text{го}}$ стовпця визначника Δ є лінійною комбінацією елементів перших трьох стовпців. Тому визначник Δ дорівнює нулю.

Достатність. Нехай тепер визначник $\Delta = 0$. Покажемо, що чотири площини (9), (10), (11), (12), три з яких перетинаються в одній точці, належать до однієї в'язки. Не порушуючи загальності, можна вважати, що в одній точці перетинаються площини (10), (11), (12). Необхідною і достатньою умовою цього є нерівність

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Координати $(x_0; y_0; z_0)$ точки перетину площин (10), (11), (12) визначаються за формулами

$$x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}, \; y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}, \; z_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}}. \qquad (15)$$

Для того щоб площина (9) проходила через цю ж точку $(x_0; y_0; z_0)$, необхідно і достатньо, щоб

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 .$$

Підставивши в останню рівність замість x_0, y_0, z_0 їх значення (15), отримуємо

$$A_1\begin{vmatrix} D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \\ D_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \\ A_4 & D_4 & C_4 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix} - D_1\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 ,$$

що доводить теорему.

§12. Взаємне розміщення трьох площин у просторі

Нехай задано три площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ своїми загальними рівняннями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

З алгебраїчної точки зору задача про взаємне розміщення трьох площин у просторі зводиться до дослідження розв'язків системи лінійних рівнянь (1). Згідно з критерієм сумісності системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі) маємо: система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи (див. §2 гл. IX). Тому складемо основну матрицю A і розширену матрицю B з коефіцієнтів рівнянь (1):

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо ранги цих матриць відповідно $r(A)=r_1$ і $r(B)=r_2$.

Можливі наступні випадки:

1°. $r_1=3$. У цьому випадку $r_2=3$ і система рівнянь (1) згідно з правилом Крамера має єдиний розв'язок. Площини $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, які визначаються рівняннями (1), мають єдину спільну точку (рис. 1).

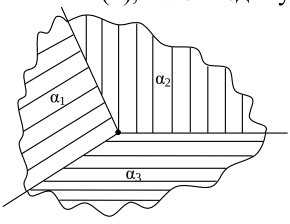

Рис. 1

2°. $r_1=2,\ \ r_3=3$. Система рівнянь (1) у цьому випадку є несумісною, а тому площини $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ не мають точок, які одночасно належать до кожної з них. У випадку **2°** можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1,\vec{N}_2,\vec{N}_3$ площин $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ немає колінеарних, тобто не існує двох рядків матриці A, відповідні елементи яких пропорційні. Геометрично це означає, що кожні дві площини з площин $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ перетинаються по прямій і ці три прямі перетину паралельні, причому прямі перетину попарно різні. Площини $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ вирізають з простору нескінченну трикутну призму (рис. 2).

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1,\vec{N}_2,\vec{N}_3$ площин $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ є два колінеарних (всі вектори не можуть бути колінеарними, оскільки $r_1=2$). Це означає, що в матриці A існують два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. З геометричної точки зору маємо дві паралельні площини, які перетинаються третьою площиною (рис. 3).

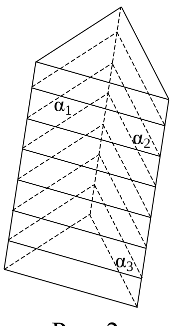

Рис. 2

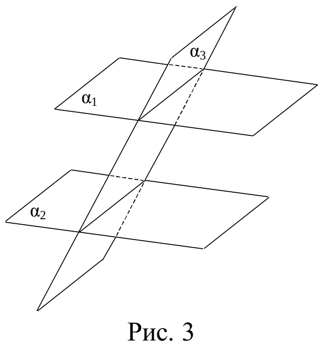

Рис. 3

3°. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$. У цьому випадку система (1) сумісна і має нескінченну множину розв'язків. Серед рівнянь системи (1) незалежних лише два, наприклад, перше і друге, а третє рівняння є їх наслідком. Це означає, що спільні розв'язки перших двох рівнянь (ці розв'язки залежать лише від одного параметра) є також і розв'язками третього рівняння. З геометричної точки зору маємо дві площини, які перетинаються по прямій, і третю площину, що проходить через цю пряму. У випадку **3°** також можливі два розміщення площин.

а) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ немає колінеарних. Тоді у матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що всі площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – різні і проходять через одну і ту ж пряму (рис. 4).

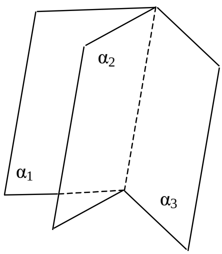

Рис. 4

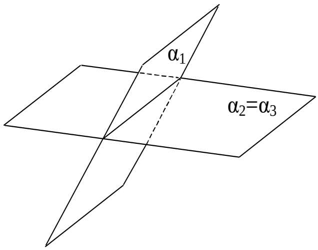

Рис. 5

б) Серед нормальних векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ є два колінеарних. У матриці B у цьому випадку існує два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що два з рівнянь (1) визначають одну і ту ж площину, яку перетинає третя площина (рис. 5).

4°. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Система (1) несумісна. Можливі такі випадки.

а) У матриці B не існує двох рядків, відповідні елементи яких пропорційні. Це означає, що площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ різні і будь-які дві з них паралельні (рис. 6).

б) У матриці B є два рядки, відповідні елементи яких пропорційні. У цьому випадку два з рівнянь (1) визначають одну і ту ж площину, яка паралельна третій площині (рис. 7).

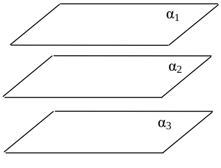

Рис. 6

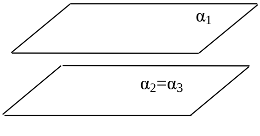

Рис. 7

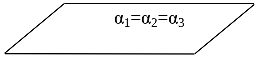

Рис. 8

5º. $r_1 = 1,\ r_2 = 1$. У цьому випадку всі три рівняння (1) визначають одну і ту ж площину (рис. 8).

Випадок $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ неможливий.

Приклад 1. Виявснити взаємне розміщення трьох площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, які задано такими рівняннями

$$\begin{aligned} &x + y - z - 1 = 0,\\ &x + 4y - 5 = 0,\\ &2x + 5y - z - 6 = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Розв'язання. Нормальними векторами площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є відповідно вектори

$$\vec{N}_1(1; 1; -1),\ \vec{N}_2(1; 4; 0),\ \vec{N}_3(2; 5; -1).$$

Оскільки серед нормальних векторів немає колінеарних, то всі три площини різні.
Застосуємо метод Гаусса до системи (2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $r_1 = 2$ і $r_2 = 2$. Маємо випадок **3º** а). Площини α_1 і α_2 перетинаються по прямій, а площина α_3 проходить через цю пряму, тобто площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ належать до одного пучка площин.