Комплексні числа

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв'язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від'ємних чисел. Щоб ця дія стала можливою, ввели множину нових чисел.

Означення комплексного числа і уявної одиниці

Число $a + bi$, де a і b — будь-які дійсні числа, i — уявна одиниця, називається **комплексним числом** (a — дійсна частина, bi — уявна частина комплексного числа, а b — коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює -1, позначають буквою i і називають уявною одиницею (i — перша буква латинського слова $imaginarius$ — уявний).

Тобто, для символу i виконується рівність

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Запис $a + bi$ називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Примітка! Слово «комплексний» означає складений.

Часто комплексне число позначають буквою z і записують $z = a + bi$. Комплексні числа — це розширення числової системи дійсних чисел. Позначаються вони буквою $\mathbb{C}$.

Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.

Для комплексних чисел означені алгебраїчні операції додавання та множення, які узагальнюють додавання та множення дійсних чисел із зберіганням властивостей асоціативності, комутативності та дистрибутивності.

Які комплексні числа називаються рівними, спряженими, протилежними?

Два комплексних числа $a + bi$ і $c + di$ **рівні між собою** тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$, тобто, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не має сенсу. **Ці числа за величиною не порівнюють**. Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше $10i$ чи $3i$, $2 + 5i$ чи $5 + 2i$.

Числа $a + bi$ і $a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають **спряженими**.

Приклади.

1. Спряженими є комплексні числа $4 + 3i$ та $4 - 3i$.
2. Якщо дано число $6i$, то спряженим до нього є $-6i$.
3. До числа 11 спряженим буде 11, бо $11 + 0i = 11 - 0i$

Числа $a + bi$ і $-a - bi$ називаються протилежними. Тобто, два числа $a + bi$ та $-a - bi$, сума яких дорівнює нулю, називають **протилежними**.

Дії над комплексними числами.

Нехай дано два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$.

а) Додавання комплексних чисел

Сумою двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частині дорівнюють відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах доданків.

Приклади (додавання комплексних чисел):

1. $(-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8)i = 1 - 3i$
2. $(3 + 2i) + (-1 - 5i) = (3 - 1) + (2 - 5)i = 2 - 3i$
3. $(2 + 3i) + (6 - 3i) = (2 + 6) + (3 - 3)i = 8 - 0i = 8$
4. $(10 - 3i) + (-10 + 3i) = (10 - 10) + (-3 + 3)i = 0 - 0i = 0$

Примітка! Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

б) Віднімання комплексних чисел

Різницею двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Приклади (віднімання комплексних чисел):

1. $(-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + \big(2 - (-5)\big)i = -8 + 7i$
2. $(6 + 7i) - (6 - 5i) = (6 - 6) + (7 + 5)i = 12i$
3. $(0{,}3 + 2{,}5i) - (-0{,}75 + 1{,}5i) = (0{,}3 + 0{,}75) + (2{,}5 - 1{,}5)i = 1{,}05 + i$

в) Множення комплексних чисел

Добутком двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$.

Приклад (множення комплексних чисел):

$$(1 - 2i) \cdot (3 + 2i) = (1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2) + (1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3)i =$$
$$= (1 - 2i) \cdot (3 + 2i) = (1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2) + (1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3)i =$$
$$= (3 + 4) + (2 - 6)i = 7 - 4i.$$

г) Ділення комплексних чисел.

Часткою комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число

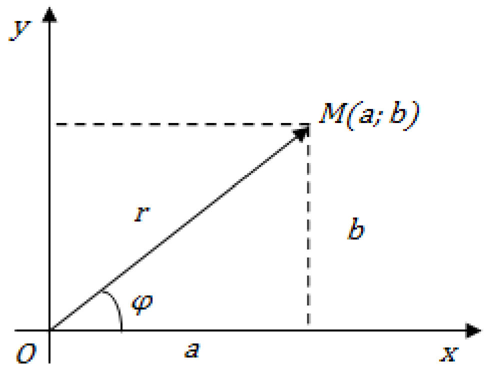
$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Приклад (знайти частку комплексних чисел):

$$\frac{7 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(7 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i.$$

Геометричне зображення комплексного числа

Комплексне число $z = a + bi$ геометрично зображують точкою $M(a; b)$ координатної площини.



Геометричне зображення комплексного числа

Комплексне число зручно зобразити у вигляді вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$.

Довжина вектора, який зображає комплексне число, називається **модулем цього комплексного числа**. Модуль комплексного числа позначається r. Тобто

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Кут φ між додатним напрямком осі абсцис і вектором $\overrightarrow{OM}$ називається **аргументом комплексного числа**.

Примітка! Кожне комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінчену множину аргументів, які відрізняються один від одного на $360^0 k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

$$cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a}$$

Тригонометрична форма комплексного числа.

Виразивши a і b через модуль r і аргумент φ, комплексне число $a + bi$ запишемо у вигляді

$$a + bi = r(cos\varphi + isin\varphi)$$

Права частина цієї тотожності називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Дії над комплексними числами, які записані у тригонометричній формі.

Нехай задано два комплексні числа:

$$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2).$$

1. ***Множення***

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. ***Ділення***

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi 1 - \varphi 2) + isin(\varphi 1 - \varphi 2)).$$

3. ***Піднесення до степеня (формула Муавра)***

$$z^n = r^n(cosn\varphi + i\ sin\ n\varphi).$$

4. ***Добування кореня***

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$
$$k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Показникова форма комплексного числа.

Справедлива рівність $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
Цю формулу називають **формулою Ейлера**.

Формула Ейлера дозволяє записати комплексне число в компактній формі: $z = re^{i\varphi}$, де φ - аргумент числа, а r - його модуль. Це так звана **показникова форма** запису комплексного числа. Для отримання показникової форми запису комплексного числа не потрібно попередньо записувати його в тригонометричній формі.

Якщо маємо показникову форму запису комплексного числа, то можна вказати його модуль і аргумент.

Приклади

1. Подати в показниковій формі комплексне число $z = 3 + 4i$

Модуль $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Знаходимо аргумент φ

Оскільки

$$tg\varphi = \frac{4}{3}, \qquad \varphi = arctg\frac{4}{3} \approx 0{,}93$$
$$3 + 4i = 5e^{0{,}93i}.$$

2. Подати в показниковій формі комплексне число $z = \sqrt{3} - i$

Знаходимо модуль: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$

Аргумент φ (головне значення) знайдемо із співвідношення

$$tg\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

Контрольні запитання.

1. Як означається комплексне число?
2. Що називають дійсною та уявною частинами комплексного числа?
3. Як комплексне число $z = a + bi$ зображується на площині XOY ?
4. Як означається модуль, аргумент комплексного числа?
5. Що називають головним значенням аргументу комплексного числа?
6. Запишіть спряжене до комплексного числа $z = a + bi$.
7. Які дії виконуються над комплексними числами в алгебраїчній формі? Сформулюйте правила.
8. Як означається комплексне число в тригонометричній формі?
9. Запишіть умову рівності двох комплексних чисел у тригонометричній формі.
10. Які дії виконуються над комплексними числами в тригонометричній формі?
11. Що називають формулою Муавра? Яких форм комплексних чисел стосується ця формула?
12. Скільки значень має корінь n -ного степеня з комплексного числа z ?
13. Що називають формулами Ейлера?
14. Як означається комплексне число в показниковій формі?
15. Які дії виконуються над комплексними числами в показниковій формі?

До початку лекції