

§ 6. Рівноприскорений рух

Основні знання параграфа: рівноприскорений рух, прискорення, швидкість у рівноприскореному русі.

Рівноприскорений рух. Рівномірний прямолінійний рух порівняно рідко зустрічається на практиці. Більш поширеним є рух, під час якого швидкість змінюється. Під час такого руху тіла за рівні інтервали часу проходять різні відстані. Розглянемо такий нерівномірний рух, під час якого швидкість тіла за будь-які рівні інтервали часу змінюється однаково. Такий рух називають *рівноприскореним*.

Рух тіла, під час якого його швидкість за будь-які рівні інтервали часу змінюється однаково, називають рівноприскореним рухом.

Для характеристики зміни швидкості існує певна фізична величина. Спробуємо її визначити. Хай у початковий момент часу швидкість тіла дорівнює \vec{v}_0 , а через інтервал часу t вона дорівнює \vec{v} . Для визначення зміни швидкості за одиницю часу треба взяти відношення зміни швидкості $\vec{v} - \vec{v}_0$ до інтервалу часу t . Відношення $\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, що характеризує швидкість зміни швидкості, називають *прискоренням*.

Прискоренням тіла при рівноприскореному русі називають фізичну величину, що дорівнює відношенню зміни швидкості тіла до інтервалу часу, протягом якого ця зміна відбулася.

Прискорення позначають буквою \vec{a} :

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}.$$

Прискорення є *векторною величиною*, оскільки дорівнює добутку векторної величини $\vec{v} - \vec{v}_0$ на скалярну величину $\frac{1}{t}$.

Знаючи початкову швидкість \vec{v}_0 тіла і його прискорення \vec{a} , можна знайти швидкість \vec{v} тіла в будь-який момент часу. З формули випливає, що

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Цю швидкість називають миттєвою швидкістю рівноприскореного руху.

За одиницю прискорення в СІ беруть прискорення такого рівноприскореного руху, під час якого за 1 с швидкість змінюється на $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$[a] = \left[\frac{1 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1 \text{ с}} \right] = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right]$$

Для обчислень використовують рівняння, до яких входять не вектори, а їхні проекції. У прямолінійному русі вектори \vec{v}_0 і \vec{v} напрямлені вздовж однієї прямої, яка є водночас траєкторією руху. Уздовж цієї самої прямої зручно спрямувати й координатну вісь. Якщо скористатися віссю X , то з рівняння випливає:

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

Якщо вектори \vec{v} , \vec{v}_0 і \vec{a} спрямовані вздовж однієї прямої (осі X), то модулі їх проекцій дорівнюють модулям самих векторів. Знаки проекцій визначаються

напрямом векторів відносно осі. Якщо знаки проекцій векторів \vec{v}_0 і \vec{a} , збігаються, то модуль швидкості v тіла зростає з часом, що призводить до розгону тіла. У випадку, коли знаки проекцій векторів \vec{v}_0 і \vec{a} протилежні, то модуль швидкості v поступово зменшується. У подальшому тіло може зупинитися і почати розганятися, але вже у протилежному напрямі. При рівноприскореному русі швидкість тіла може зростати або сповільнюватись.

Із курсу 8 класу ви знаєте, що рух можна характеризувати середньою швидкістю. Її знаходять, поділивши переміщення тіла \vec{S} на час, протягом якого воно здійснене:

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{S}}{t}, \text{ звідки } \vec{S} = \vec{v}_c t.$$

Якщо рух рівноприскорений, то середню швидкість можна визначити за формулою:

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2}, \text{ оскільки } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \text{ то } \vec{v}_c = \frac{\vec{v}_0 + \vec{a}t + \vec{v}_0}{2} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{a}t}{2}$$

Виведемо формулу переміщення при рівноприскореному русі.

$$\vec{S} = \vec{v}_c \cdot t; \quad s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В проекціях на обрану вісь X ,

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Якщо початкова швидкість тіла дорівнює 0, то рівняння переміщення та проекції переміщення має вигляд:

$$\vec{s} = \frac{\vec{a}t^2}{2}; \quad s_x = \frac{a_x t^2}{2}.$$

Виведемо формулу для обчислення координати x при рівноприскореному русі. Враховуючи, що для прямолінійного руху $s_x = x - x_0$, отримаємо:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

для випадку, коли $v_{0x} = 0$,

$$x = x_0 + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Іноколи час руху тіла невідомий, тоді користуються іншою формулою для визначення переміщення. З формули прискорення $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$ визначимо час

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x};$$

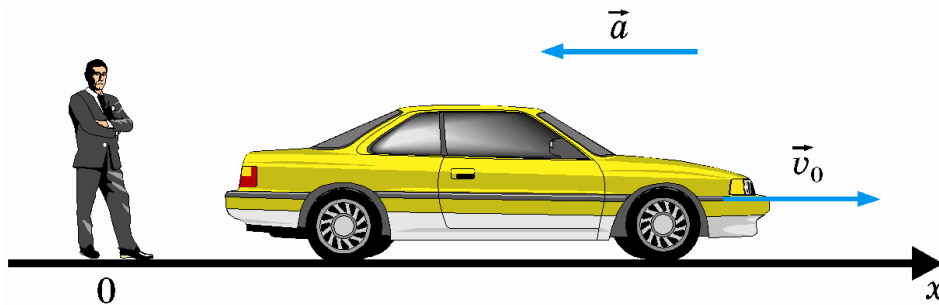
$$s_x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} \cdot \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

При прямолінійному рівноприскореному русі модуль переміщення і шлях чисельно рівні, якщо знаки проекцій векторів \vec{v}_0 і \vec{a} , збігаються. Тоді формули шляху при прямолінійному рівноприскореному русі $l = v_0 t + \frac{at^2}{2}$; $l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$.

Приклади розв'язування задач

1. Автомобіль проїжджає повз спостерігача, рухаючись із швидкістю $10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. У цей момент водій натискає на гальмо, і автомобіль починає рухатися з прискоренням, яке за модулем дорівнює $1,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Який час мине до зупинки автомобіля?



Мал. 1.22. До задачі 1

Дано:

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$a = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$v = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

t — ?

Розв'язання:

Виберемо за початок відліку координати те місце, в якому перебуває спостерігач, і спрямуємо вісь координат X у бік руху автомобіля (мал. 1.22). Позначимо швидкість автомобіля в момент, коли він проходить повз спостерігача, через \vec{v}_0 , а його прискорення після ввімкнення гальма — через \vec{a} .

Скористаємося формулою $v_x = v_{0x} + a_x t$, де v_x , v_{0x} і a_x — відповідно проекції кінцевої \vec{v} та початкової швидкості \vec{v}_0 і прискорення \vec{a} на вісь X .

$$v = v_0 - at. \text{ Так як } v = 0, \text{ то } t = \frac{v_0}{a}; t = \frac{10,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1,0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 10 \text{ с}$$

Відповідь: $t = 10 \text{ с}$.

Рівноприскореним називають рух, при якому швидкість його за будь-які рівні інтервали часу змінюється на однакову величину.

Прискорення тіла при рівноприскореному русі називають величину, що дорівнює відношенню зміни швидкості тіла до інтервалу часу, протягом якого ця зміна відбулася.

Перевір себе

1. Що таке прискорення і для чого його потрібно знати? 2. Під час будь-якого нерівномірного руху швидкість змінюється. Як прискорення характеризує цю зміну? 3. У якому випадку при рівноприскореному русі швидкість тіла зростає? Сповільнюється? 4. Що таке рівноприскорений рух? 5. Чи може тіло рухатися з великою швидкістю, але з малим прискоренням? 6. Як напрямлений вектор прискорення при прямолінійному нерівномірному русі?

Поміркуй

7. Швидкість — векторна величина. Що може змінюватися під час прямолінійного рівноприскореного руху? 8. Чи може швидкість руху тіла дорівнювати нулю, коли його прискорення не дорівнює нулю?

Вправа 3. 1. Переїжджаючи з одного пункту в другий, автомобіль проїхав половину часу із сталою швидкістю $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. З якою сталою швидкістю він повинен рухатися решту часу, якщо середня швидкість руху $65 \frac{\text{км}}{\text{год}}$? 2. Першу половину шляху до місця призначення автомобіль проїхав із сталою швидкістю $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другу половину — із сталою швидкістю $60 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. З якою середньою швидкістю рухався автомобіль? 3. Тролейбус, рушаючи з місця, рухається із сталим прискоренням $1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Через який час він набере швидкості $54 \frac{\text{км}}{\text{год}}$? 4. Автомобіль, що рухається із швидкістю $36 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, зупиняється під час гальмування протягом 4 с. З яким сталим прискоренням рухається автомобіль під час гальмування? 5. Автомобіль, рухаючись із сталим прискоренням, на певній ділянці шляху збільшив свою швидкість від 15 до $25 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. За який час збільшилася ця швидкість, якщо прискорення автомобіля $1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?

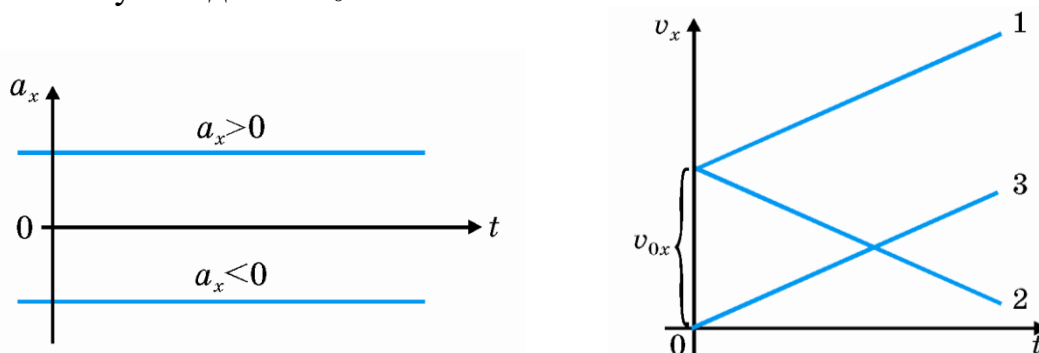
Відповідь: 1. $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; 2. $54,5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$; 3. 10 с; 4. $-2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 5. 6,3 с.

§ 7. Графіки рівнозмінного руху

Основні знання параграфа: графік прискорення, графік швидкості, графіки проекції переміщення і координати.

Прискорення при рівнозмінному русі стає сталим, отже графік його проекції на вісь X є пряма лінія, паралельна до осі часу t .

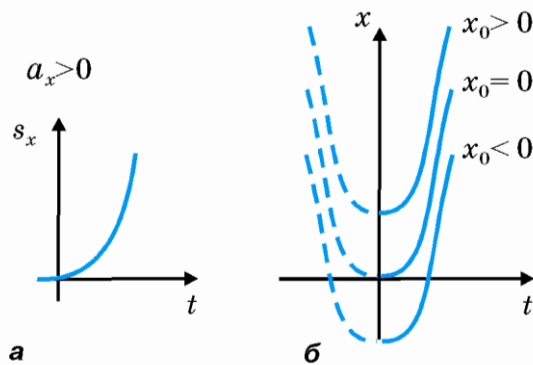
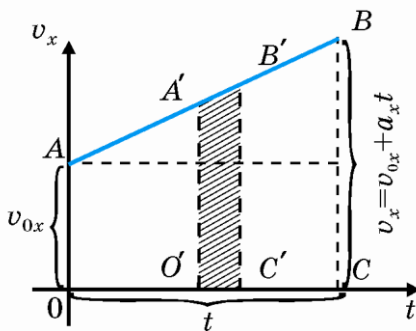
При рівноприскореному русі тіла вздовж осі X швидкість змінюється з часом за формулою $v_x = v_{0x} + a_x t$. Графік швидкості залежно від часу являє собою пряму (мал. 1.24). В разі, якщо тіло рухається в додатному напрямі, пряма 1 на цьому малюнку відповідає рухові з швидкістю, яка зростає, пряма 2 — проекції швидкості, яка зменшується. З графіків (прямі 1 і 2) видно, що в момент часу $t = 0$ ці тіла мали початкову швидкість v_0 .



Виділимо на графіку швидкості рівноприскореного руху маленьку ділянку $A'B'$ (мал. 1.25) і проведемо з точок A' і B' перпендикуляри на вісь t . Довжина відрізка $O'C'$ на осі t у вибраному масштабі дорівнює тому малому інтервалу часу, за який швидкість змінилася від її значення в точці A' до її значення в точці B' . Під ділянкою $A'B'$ графіка дістали фігури $A'B'C'O'$, яка мало відрізняється від прямокутника. Площа її чисельно дорівнює проекції переміщення тіла за час, що відповідає відрізку $O'C'$. На такі фігури можна поділити всю площу, розміщену під графіком швидкості. Отже, проекція переміщення за весь час t чисельно дорівнює площі трапеції $OABC$. Як відомо з геометрії, площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту. У розглядуваному випадку довжина однієї з основ трапеції чисельно дорівнює v_{0x} , довжина другої — v_x (див. мал. 1.25), а її висота чисельно дорівнює t . Звідси випливає, що проекція s_x переміщення виражається формулою:

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \text{ Підставимо у цей вираз } v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t, \text{ звідси } s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$



Мал. 1.25. До виведення формули проекції переміщення

Мал. 1.26. Графіки проекції переміщення і координати ($v_{0x} = 0, a_x > 0$)

Якщо у початковий момент часу тіло перебувало в спокої, то формула набирає вигляду:

$$s_x = \frac{a_x t^2}{2}.$$

Графік швидкості такого руху подано на мал. 1.24 (пряма 3).

У формулах s_x, v_{0x} і v_x є проекціями векторів \vec{s}, \vec{v}_0 і \vec{v} на вісь X . Тому вони можуть бути як додатними, так і від'ємними.

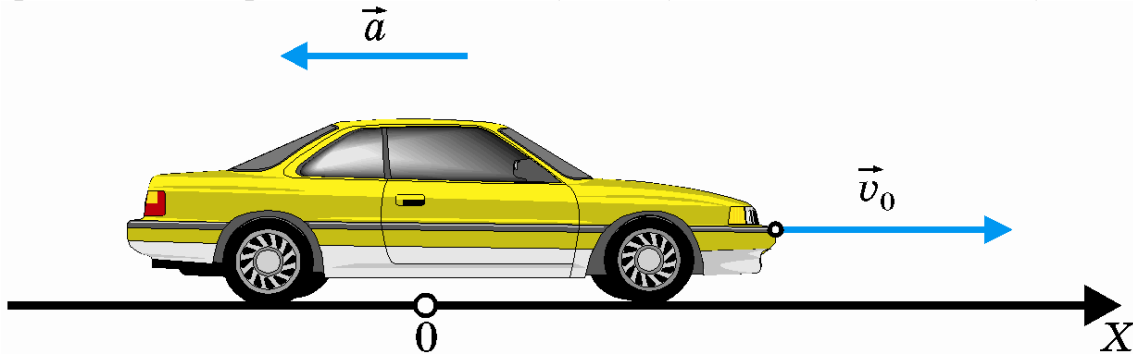
При рівноприскореному русі до формули входить квадрат часу. Це означає, що графік залежності проекції переміщення від часу буде мати вигляд параболи.

Наприклад, якщо $v_{0x} = 0$ і $a_x > 0$, то графіки мають вигляд, зображений на мал. 1.26 а. У графіку залежності координати від часу, якщо $x_0 \neq 0$, вершина параболи зміщується по осі ординат вгору або вниз, залежно від значення x_0 (мал. 1.26 б)

Якщо $v_{0x} = 0$ і $a_x < 0$, то гілки параболи зорієнтовані вниз, і зміщення вершини параболи вгору або вниз по осі ординат так само залежить від значення x_0 .

Приклад розв'язування задачі

1. Водій автомобіля, що рухається із швидкістю $72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, побачив червоний сигнал світлофора і натиснув на гальмо. Після цього швидкість автомобіля почала зменшуватись на $5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ щосекунди. Знайти відстані, які автомобіль проходить за перші 2 с після початку гальмування і до повної його зупинки.



Мал. 1.27. До задачі 1

Дано:

$$v_0 = 72 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$a = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$t = 2 \text{ с}$$

$$s_1 \text{ — ? } s_2 \text{ — ?}$$

Розв'язання:

Координатну вісь X спрямуємо вздовж напрямку руху автомобіля (мал. 1.27), а за початок відліку координати виберемо те місце на шляху, де почалось гальмування. Початок відліку часу віднесемо до моменту, коли водій натиснув на гальмо.

Початкова швидкість \vec{v}_0 автомобіля напрямлена так само, як вісь X , а прискорення в протилежний бік, так що проекція початкової швидкості v_{0x} додатна, а проекція прискорення a_x — від'ємна:

$$v_{0x} = v_0; \quad a_x = -a.$$

Відстані, пройдені автомобілем, — це проекції переміщення s_x , а $s_x = x - x_0$.

Оскільки $x_0 = 0$, то треба знайти координати x_1 і x_2 автомобіля через 2 с після початку гальмування і в момент зупинки. Координату x_1 (через 2 с) визначимо за формулою:

$$x_1 = x_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}; \quad x_1 = 0 + 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 2 \text{ с} - \frac{5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 4 \text{ с}^2}{2} = 40 \text{ м} - 10 \text{ м} = 30 \text{ м}$$

Оскільки нам відомі початкова і кінцева швидкості, координату x_2 можна визначити за формулою. Кінцева швидкість v дорівнює нулю (автомобіль зупинився), так що $s_x = x_2 - x_0 = \frac{v_{0x}^2}{2a}$ (тут x_0 дорівнює нулю). Знайдемо x_2 :

$$x_2 = \frac{(20 \frac{\text{м}}{\text{с}})^2}{2 \cdot (5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2})} = 40 \text{ м}.$$

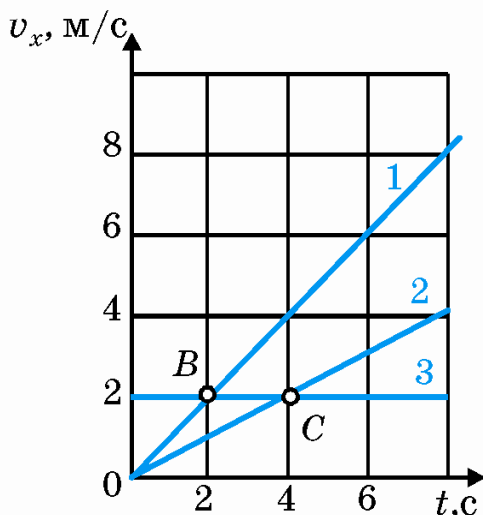
Відповідь: $s_1 = 30 \text{ м}$; $s_2 = 40 \text{ м}$.

Графіки прискорення, швидкості при рівноприскореному русі є прямими лініями. За графіком швидкості можна визначити шлях, модуль переміщення. Графіком координати тіла при рівноприскореному русі є парабола.

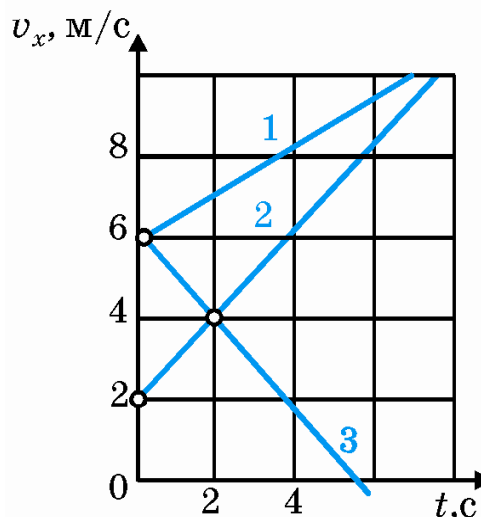
Перевір себе

1. Які характеристики рівнозмінного руху можна визначити за графіком його швидкості? 2. Яким способом вам здається більш обґрунтовано виводити формулу координати, шляху рівнозмінного руху? Як у попередньому параграфі чи за допомогою графіка? 3. Які характеристики рівнозмінного руху можна визначити за допомогою графіків швидкості на мал. 1.24.

Вправа 4. 1. Побудуйте в одних координатних осях (x, t) графіки швидкостей двох тіл, що рухаються рівноприскорено: перше із зростаючою за модулем швидкістю, а друге — із спадною. Початкові швидкості й прискорення тіл відповідно дорівнюють: $1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ і $0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; 9 м/с і $1,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Який шлях пройде друге тіло, поки зупиниться? Через який час швидкості обох тіл стануть однаковими і який шлях пройде за цей час перше тіло? 2. На мал. 1.28 подано графіки проекцій швидкостей руху двох тіл. Який характер руху цих тіл? Що можна сказати про швидкості тіл у моменти часу, які відповідають точкам B і C графіка? Визначте прискорення і запишіть вирази для швидкості й переміщення цих тіл.



Мал. 1.28. До задачі 2, вправа 4



Мал. 1.29. До Задачі 3, вправа 4

3. Користуючись поданими на мал. 1.29 графіками проекцій швидкостей трьох тіл, виконайте такі завдання: а) визначте прискорення цих тіл; б) складіть для кожного тіла формулу залежності швидкості від часу; в) визначте, чим подібні й чим відрізняються рухи, що відповідають графікам 2 і 3.

Поміркуй. *Як рівномірний рух, графіки рівномірного руху підтверджують однорідність простору і часу?