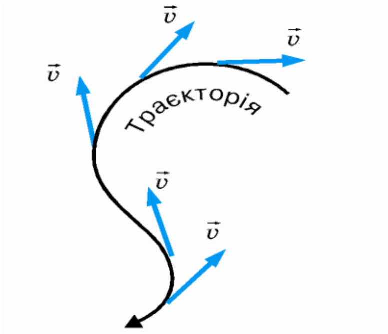
§ 11. Рівномірний рух тіла по колу

Основні знання параграфа: напрям доцентрового прискорення, формула доцентрового прискорення.

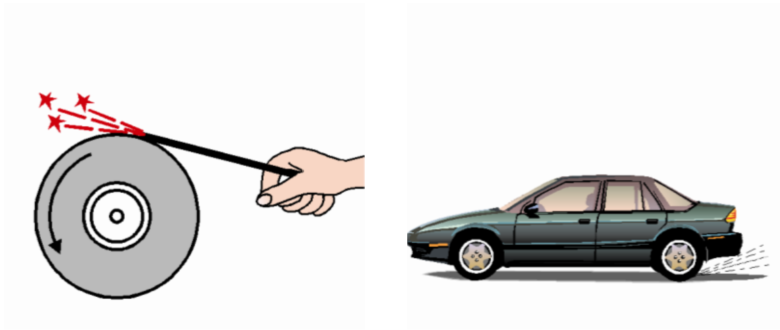
З курсу 8 класу ви знаєте, що в природі дуже часто зустрічаються криволінійні рухи. До таких рухів належить, наприклад, рух по колу. Рівномірним рухом по колу називається рух, при якому тіло обертається із сталою за модулем швидкістю.

Якщо під час прямолінійного руху напрям вектора швидкості завжди збігається з напрямом переміщення, то при криволінійному русі напрям швидкості визначається по дотичній до криволінійної траєкторії *(мал. 1.35).*

Миттєва швидкість тіла в будь-якій точці криволінійної траєкторії напрямлена по дотичній до траєкторії в цій точці.



Мал. 1.35. Напрям швидкості при криволінійному русі визначається по дотичній до криволінійної траєкторії



Мал. 1.36. Напрямок швидкості при криволінійному русі

Переконатися у тому, що швидкість під час криволінійного руху справді напрямлена по дотичній, можна спостерігаючи за траєкторією іскор при роботі на точилі *(мал. 1.36 а)* або бризок із під колеса автомобіля, що буксує *(мал. 1.36 б).*

Напрям швидкості при криволінійному русі постійно змінюється, тому *криволінійний рух завжди відбувається з прискоренням.* Це вірно й у випадку, якщо модуль швидкості залишається сталим.

Розглянемо рівномірний рух тіла по колу із сталою за модулем швидкістю. Лінійна швидкість тіла, яке рівномірно рухається по колу, постійно змінюється за напрямом і в будь-якій точці траєкторії напрямлена по дотичній до дуги цього кола. Прискорення такого руху:

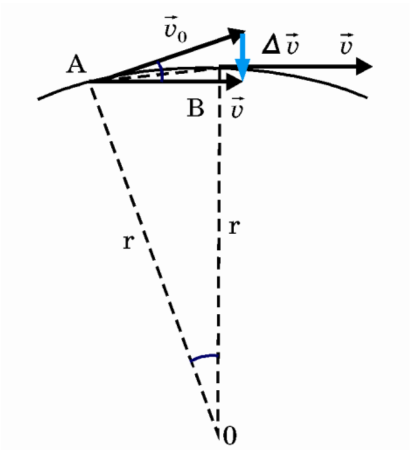
$\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, або $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{t}$, де $\vec{v} - \vec{v}_0 = \Delta\vec{v}$.

Вектор $\vec{a}$ напрямлений так само, як вектор $\Delta\vec{v}$, бо t — величина скалярна.

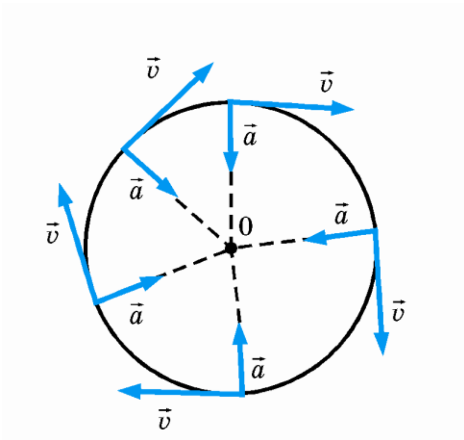
Нехай радіус кола, по якому рухається тіло дорівнює r. В початковий момент часу ($t_0 = 0$) тіло перебуває в точці A. Його швидкість дорівнює $\vec{v}_0$ *(мал. 1.37).* Через інтервал часу t тіло перемістилося в точку B. Припустимо, що точки A і B розташовані так близько, що дугу AB можна вважати за довжиною рівною хорді *AB*. Швидкість тіла в точці *B* дорівнює $\vec{v}$. Перенесемо вектор $\vec{v}$ паралельно самому собі так, щоб він і вектор $\vec{v}_0$ виходили з точки А, і сполучимо кінці обох векторів відрізком прямої, спрямувавши його від $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$. Знайдений напрямлений відрізок і є вектор $\Delta\vec{v}$. Коли точки *A* і *B* розташовані близько одна до одної, вектор $\Delta\vec{v}$ напрямлений до центра кола. Те й же напрям має і вектор прискорення $\vec{a}$. Таким чином, під час рівномірного руху тіла по колу його прискорення напрямлене до центра кола. Його називають *доцентровим прискоренням. У будь-якій точці кола, по якому рухається тіло, вектор прискорення перпендикулярний до вектора швидкості мал. 1.38*.

Знайдемо числове значення доцентрового прискорення. Розглянемо *мал. 1.37*. Оскільки $v = v_0$, то трикутник, складений із векторів $\vec{v}_0$, $\vec{v}$, $\Delta\vec{v}$ — рівнобедрений. Розглянемо також трикутник *OAB*. Кути при вершинах обох трикутників рівні, бо вони утворені взаємно перпендикулярними сторонами: $\vec{v}_0 \perp OA$ і $\vec{\upsilon} \perp OB$. Трикутник *OAB* також рівнобедрений, оскільки сторони *OA* і *OB* — радіуси кола. Таким чином, трикутники подібні як рівнобедрені з рівними кутами при вершинах. Оскільки трикутники подібні, то їх відповідні сторони пропорційні:

$$\frac{\Delta v}{AB} = \frac{v}{r}.$$



Мал. 1.37. До виведення формули прискорення



Мал. 1.38. Вектор доцентрового прискорення перпендикулярний до вектора швидкості

Враховуючи попереднє припущення, довжина дуги $\breve{AB}$ дорівнює хорді *AB* або шляху, пройденому тілом із сталою за модулем швидкістю *v*. Цей шлях дорівнює *vt*. Тому:

$$\frac{\Delta v}{vt} = \frac{v}{r} \quad \text{або} \quad \frac{\Delta v}{t} = \frac{v^2}{r}.$$

Оскільки розглядуваний інтервал часу *t* дуже малий, то $\frac{\Delta v}{t}$ — це модуль миттєвого прискорення. Отже,

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Прискорення тіла, яке рухається рівномірно по колу, напрямлене до центра кола і визначається за формулою $a = \frac{v^2}{r}$.

Перевір себе

1. Як напрямлена миттєва швидкість у криволінійному русі? 2. Чим відрізняються зміни швидкості в криволінійному і прямолінійному рухах? 3. Чи може тіло рухатися за криволінійною траєкторією без прискорення? 4. Чи можуть збігатися напрями векторів швидкості й прискорення в криволінійному русі? 5. Який зв'язок між криволінійним рухом і рухом по колу? 6. Як напрямлене прискорення тіла, що рухається по колу із сталою за модулем швидкістю? 7. Чи можна вважати доцентрове прискорення сталим, а рівномірний рух по колу рівноприскореним?

Вправа 6. 1. Автомобіль рухається по заокругленню дороги радіусом 100 м із швидкістю 54 км/год. Визначте доцентрове прискорення автомобіля.

§ 12. Період і частота обертання. Кутова швидкість

Основні знання параграфа: період обертання, кутова швидкість, частота обертання.

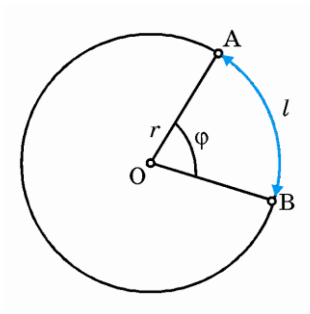
Для характеристики руху тіла по колу часто характеризують проміжком часу, за який воно здійснює один повний оберт або *періодом обертання.* Цей проміжок часу позначають буквою T. Протягом часу, рівному періоду обертання T, тіло проходить шлях, який дорівнює довжині кола $2\pi r$. Лінійну швидкість v можна розрахувати як відношення шляху до проміжку часу, під час якого здійснювався рух:

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

де r — радіус кола, по якому рухається тіло.

Підставимо цей вираз для v у формулу і дістанемо наступний вираз для доцентрового прискорення:

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$



Мал. 1.39. До характеристики обертального руху

Рух тіла по колу характеризують також кутом, який описує радіус при рівномірному русі тіла по колу. Цей кут позначають φ і називають *кутовим переміщенням мал. 1.39*. Кути зазвичай вимірюють в радіанах. Один радіан (1 рад) визначається як центральний кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу кола. У загальному випадку будь-який кут φ (в радіанах) визначається виразом $\varphi = \frac{l}{r}$, де r — радіус кола, l — довжина дуги.

Під час обертання тіла навколо нерухомої осі кут φ змінюється з часом. Тому обертальний рух характеризується *кутовою швидкістю*. Це фізична величина, що дорівнює відношенню кутового переміщення φ до інтервалу часу t, протягом якого це переміщення відбулося:

$\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Нехай φ_1 і φ_2 — це кутові положення тіла в моменти часу відповідно t_1 і t_2. Тоді значення середньої кутової швидкості визначається так:

$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$,

де $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — кутове переміщення тіла за інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$.

Якщо тіло обертається рівномірно, тобто за рівні інтервали часу повертається на однакові кути, то модуль кутової швидкості:

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Кутова швидкість вимірюється, як правило, в радіанах за секунду ($\frac{рад}{с}$). 1 $\frac{рад}{с}$ дорівнює кутовій швидкості такого рівномірного руху по колу, під час якого за 1 с здійснюється переміщення в 1 рад. Вимірюють кутову швидкість за допомогою спеціальних приладів — тахометрів.

Якщо тіло за будь-які рівні інтервали часу повертається на однакові кути, такий рух називається *рівномірним обертальним рухом.*

Рух тіла по колу можна характеризувати ще однією величиною — числом обертів по колу за одиницю часу. Цю величину називають *частотою обертання* й позначають буквою *n*. Частота — це обернена величина до періоду:

$n = \frac{1}{T}$.

Одиниця частоти — $\frac{1}{с}$, або $с^{-1}$.

Врахувавши те, що кутове переміщення за час, рівний періоду *T*, становить *2π* рад, кутову швидкість можна визначити через період і частоту обертання:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\omega = 2\pi n$.

Швидкість v руху тіла по колу можна виразити також через частоту *n.* За один оберт тіло проходить шлях, що дорівнює $2\pi r$, де r — радіус кола. Отже, при *n* обертах тіло за 1 с пройде шлях, що дорівнює $2\pi rn$. Таким чином, $v=2\pi rn$. Підставивши цей вираз у формулу попереднього параграфа, дістанемо для доцентрового прискорення ще одну формулу:

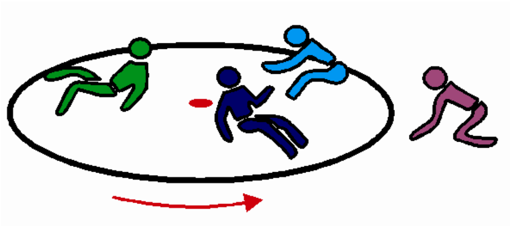
$a = 4\pi^2 n^2 r$.

Для допитливих

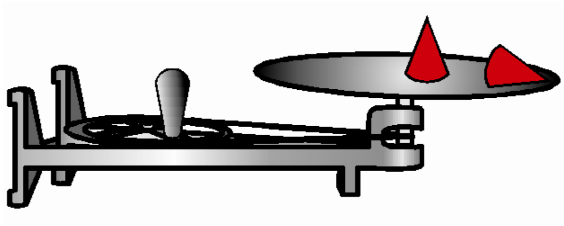
Усі ми живемо на земній кулі і обертаємося навколо її осі. Ми не помічаємо обертання Землі тому, що вона обертається дуже повільно, частота її обертання приблизно дорівнює 10^{-5} $с^{-1}$.

Можливо ви знаєте про рух на обертовій підлозі (*мал. 1.40*) або виконували такий дослід *(мал. 1.41).*

Чому тіла, що знаходяться на одному і тому ж обертовому тілі, поводять себе по-різному? Які характеристики обертального руху доцільно знати?



Мал. 1.40. «На обертовій підлозі»



Мал. 1.41. Тіла на диску, що обертається

Обертальний рух характеризується періодом обертання, частотою обертання, кутовою швидкістю.

$T=\frac{1}{n}$; $\omega=\frac{2\pi}{T}$; $\omega=2\pi n$.

Перевір себе

1. Що таке період обертання? 1. Що. таке частота обертання? 3. Як зв'язані між собою частота і період обертання? 4. Як виражається доцентрове прискорення через період обертання? 5. Як виражається доцентрове прискорення через частоту обертання?

Вправа 7. 1. Обточуваний на токарному верстаті вал, діаметр якого 80 мм, обертається з частотою 600 $\frac{об}{хв}$. Визначити швидкість різання. (Відповідь: ≈ 2,5 $\frac{м}{с}$).

2. Скільки обертів за хвилину повинен робити шпіндель токарного верстата, щоб обточувати стальний циліндр діаметром 70 мм при швидкості різання 700 $\frac{м}{хв}$? (Відповідь: ≈ $3{,}2\cdot10^3$ $\frac{об}{хв}$).

3. Секундна стрілка годинника зробила 5 обертів. Обчислити кут повороту кінця стрілки в градусах та радіанах і кутову швидкість у $\frac{град}{с}$ та $\frac{рад}{с}$. (Відповідь: 1800^0; 31,4 рад; 6 $\frac{град}{с}$; 0,105 $\frac{рад}{с}$).

4. Визначити кутові швидкості валів, які обертаються з періодами T_1= 10 с; T_2 = 0,050 с; $T_3 = 1{,}00\cdot10^{-3}$ сек. (Відповідь: ≈ 0,63 $\frac{рад}{с}$; ≈ 130 $\frac{рад}{с}$; $6{,}28\cdot10^3$ $\frac{рад}{с}$.)

5. Визначити кутові швидкості валів, частоти обертання яких 24; 60; 1800 $\frac{об}{хв}$.

(Відповідь: ≈2,5 $\frac{рад}{с}$; 2π $\frac{рад}{с}$; 60π $\frac{рад}{с}$).

6. Яка частота і кутова швидкість обертання колеса вітродвигуна, якщо за 2 хв. колесо зробило 50 обертів? (Відповідь: ≈0,42 $\frac{об}{с}$; 0,83π $\frac{рад}{с}$).

7. Точильний круг радіусом 10 см робить 1 оберт за 0,2 с. Знайдіть швидкість точок, найбільш віддалених від осі обертання. 8. Період обертання першого космічного корабля-супутника Землі «Восток» дорівнював 90 хв. Середня висота супутника над Землею була 320 км. Радіус Землі 6400 км.

Визначте швидкість корабля-супутника. 9. Знайдіть швидкість руху автомобіля, якщо його колеса радіусом 30 см роблять 600 обертів за 1 хвилину.