ЛЕКЦІЯ №3

Тема заняття. Кут між векторами. Скалярний добуток векторів.

Мета заняття: формування понять кута між векторами, скалярного добутку векторів. Формування вмінь учнів застосовувати вивчений матеріал до розв'язування задач.

Обладнання: схема "Вектори в просторі»

I. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z) \cdot \vec{b}(b_x;\ b_y;\ b_z)$ називається число (скаляр) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

Розв'язування задач

1. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(-4; -5; 2)$.
2. Дано вектори $\vec{a}(2; -1; 4)$, $\vec{b}(5; 3; n)$. При якому значенні n скалярний добуток векторів дорівнює -3?

Із означення скалярного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливають його властивості.

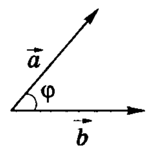

Рис. 297

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3) Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos\varphi$ (рис. 297).

Д о в е д е н н я

Від точки O відкладемо вектор $OB = \vec{b}$ (рис. 298) і $OA = \vec{a}$. Виберемо декартову систему координат так, щоб точка O була початком координат, пряма OA збіглася з віссю y, вісь z була б перпендикулярна до прямої OA і знаходилася в площині OAB, вісь x перпендикулярна до площини yz. Визначимо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

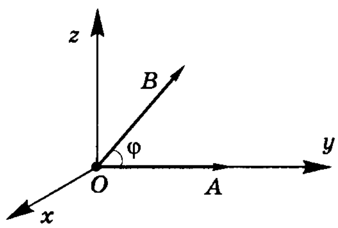

Рис. 298

$A(0; |\vec{a}|; 0)$; $B(0; |\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi)$; $\vec{a}(0; |\vec{a}|; 0)$; $\vec{b}(0; |\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi)$.

Знайдемо скалярний добуток:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 0 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi + 0 \cdot |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi$.

Наслідки із властивості 3:

1) $$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

2) Два відмінні від нуля вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Дійсно, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi = 0$, $\cos \varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, і навпаки, якщо $\varphi = 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot 0 = 0$.

Розв'язування задач

1. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 5$, $\vec{b} = 4$, а кут між векторами дорівнює 120°.
2. Ребро куба дорівнює 4 (рис. 299). Знайдіть $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

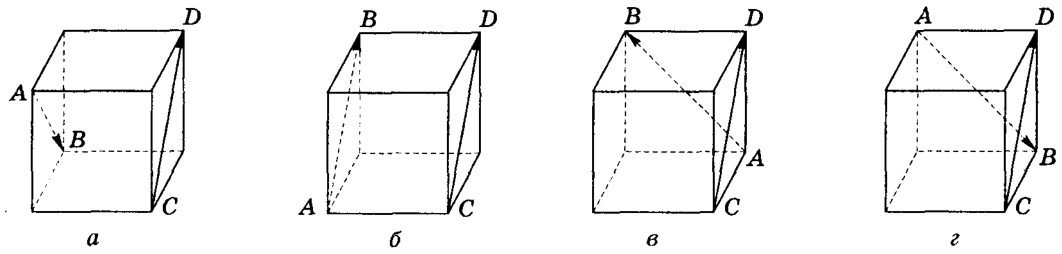

Рис. 299

3. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}(2; 3; 6)$ і $\vec{b}(3; 2; -1)$?
4. При якому значенні m вектори $\vec{a}(6; 0; 12)$ і $\vec{b}(-8; 13; m)$ перпендикулярні?
5. Чи є серед векторів $\vec{a}(2; 3; 1)$, $\vec{b}(5; 9; 2)$, $\vec{c}(-3, 1; 3)$ ортогональні вектори?
6. Який кут утворюють вектори $\vec{a}$ (-5; 0; 0) і $\vec{b}(0; 3; 0)$?
7. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(1; 1; 0)$ і $\vec{b}(1; 0; 1)$.
8. Знайдіть cos *ABC*, якщо A(1; -3; 4), B(2; -2; 6), C(3; 1; 3).

ІІ. Розв'язування задач

1. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма ABCD, якщо A (2; - 6; 0), B (-4; 8; 2), D (0;-12;0).

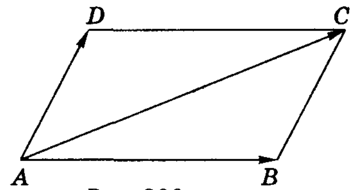

Рис. 300

Розв'язання

Оскільки $\overline{AB}$(- 6; 14; 2), $\overline{AD}$ (-2; -6; 0), то $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, *AC (-8; 8; 2) (рис. 300).*

Тоді $|\overline{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$.

В і д п о в і д ь . $2\sqrt{33}$.

2. Знайдіть кут між стороною AC і медіаною BM трикутника ABC, якщо A(-3; -5; 1), B(-4; -1; -2) і C(3; 3; 1).

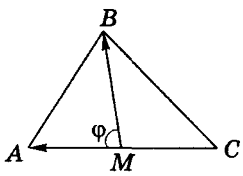

Рис. 301

Розв'язання

Кут між стороною AC та медіаною BM дорівнює куту φ між векторами $\overline{MA}$ та $\overline{MB}$ (рис. 301), або, якщо кут між цими векторами тупий,— куту 180° – φ.

Знайдемо координати точки M: $M\left(\frac{-3+3}{2}; \frac{-5+3}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$ = M (0; -1; 1).

Тоді $\overline{MB}$(-4; 0; -3), $\overline{MA}$(-3; -4; 0);

$$cos\ \varphi = \frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{|\overline{MA}|\cdot|\overline{MB}|} = \frac{(-4)\cdot(-3)+0\cdot(-4)+(-3)\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2+0^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{12}{25}.\ \varphi = arccos\ \frac{12}{25}$$ —

гострий кут. Отже, кут між стороною AC та медіаною BM дорівнює $\arccos \frac{12}{25}$.

В і д п о в і д ь . $\arccos \frac{12}{25}$.

3. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$(3; 0; -4) і $\overline{AD}$(0; 5; 0).

Розв'язання

Нехай паралелограм ABCD побудований на векторах AB і AD (рис. 302). Площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними: $S = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin\varphi$.

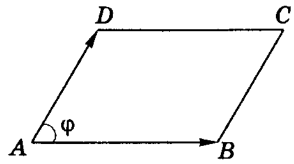

Рис. 302

$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} = 5$; $|\overline{AD}| = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = 5$;

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|} = \frac{3\cdot 0+0\cdot 5+0\cdot(-4)}{5\cdot 5} = 0.$$

Оскільки $\cos\varphi = 0$, то $\varphi = 90°$. Тоді $\sin\varphi = 1$ і $S = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$.

В і д п о в і д ь . 25.

III. Домашнє завдання

§ 14 - Істер [1] (с. 349-354), задачі № 14.2, 14.4, і 14.6, 14.10, 14.14, 14.21.

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Що називається скалярним добутком векторів $\vec{a}$(a_x; a_y; a_z) і $\vec{b}$(b_x; b_y; b_z)?

2) Сформулюйте властивості скалярного добутку векторів.

3) Яка умова ортогональності двох ненульових векторів?

4) У просторі дано вектори $\vec{a}$(1; 1; -1), $\vec{b}$(0; -1; 1). Укажіть, які з вказаних тверджень правильні, а які — неправильні:

а) $|\vec{a}+\vec{b}| = 1$;

б) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні;

в) вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;

г) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 1$;

д) вектори $\vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b}$ утворюють кут, косинус якого дорівнює $\frac{1}{\sqrt{3}}$.