

## ЛЕКЦІЯ №2

**Тема заняття.** Вектори в просторі (рівність векторів, колінеарність векторів, компланарність векторів). Додавання, віднімання векторів, множення вектора на число, властивості дій над векторами.

**Мета заняття:** формування знань учнів про вектори в просторі, дії над векторами, заданими координатами, Формування вмінь застосовувати вивчений матеріал до розв'язування задач.

**Обладнання:** схема «Вектори в просторі».

### I. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Студентам пропонується прочитати в підручнику § 4 (Істер) і познайомитися з векторами в просторі та діями над векторами в просторі.

Далі пропонується фронтально обговорювати запитання та виконувати додаткові завдання.

1. Що таке вектор? Що таке абсолютна величина вектора? Які вектори називаються однаково напрямленими? протилежно напрямленими?

**Завдання.**

- а) Укажіть однаково напрямлені, протилежно напрямлені вектори серед векторів, які вказані на зображенні прямокутного паралелепіпеда (рис. 293).

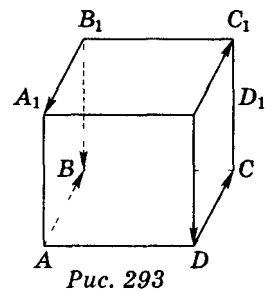


Рис. 293

- б) Знайдіть  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $|\vec{c}|$  (рис. 294), якщо на рисунку зображено куб з ребром 5 см.

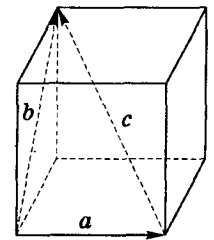


Рис. 294

2. Які вектори називаються рівними? протилежними?

**Завдання.**

- а)  $ABCD$  — паралелограм (рис. 295). Які векторні рівності можна записати?

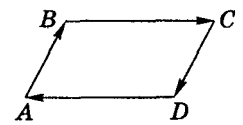


Рис. 295

- б) Чи можлива рівність векторів  $AB$  і  $BA$  ?

- в) Укажіть рівні і протилежні вектори, якщо на рис.296

зображено прямокутний паралелепіпед.

3. Дайте означення координат вектора з початком у точці  $A(a_1; a_2; a_3)$  і кінцем у точці  $B(b_1; b_2; b_3)$ . Яка умова рівності векторів, заданих координатами?

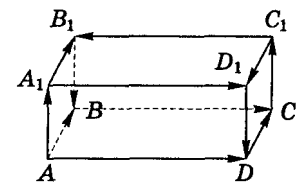


Рис. 296

### Завдання.

- а) Дано точки  $A(2; 3; 4)$ ,  $B(1; 1; 1)$ . Які координати векторів  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$  ?
- б) Які координати вектора  $\overrightarrow{AO}$ , якщо  $A(5; 1; -3)$ , точка  $O$  – початок координат?
- в) Коли вектор  $\vec{a}(1; 2; 3)$  відклали від початку координат, то дістали вектор  $OA$ . Які координати точки  $A$ ?
- г) Знайти  $|\overrightarrow{AB}|$ , якщо  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ .
- д) Дано точки  $A(3; -2; 5)$ ,  $B(-4; 6; 1)$ ,  $C(-2; -6; -11)$ ,  $D(x; y; z)$ . Знайдіть  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , якщо  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .
- е) Абсолютна величина вектора  $\vec{a}(5; 3; z)$  дорівнює 9. Знайдіть  $z$ .
4. Що називається сумою (різницею) векторів  $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$  і  $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$ ? Яка умова належності точок  $A, B, C$  прямій?

### Завдання.

- а) Дано вектори  $\vec{a}(4; -5; 6)$ ,  $\vec{b}(-1; 2; 5)$ . Знайдіть:  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .
- б) Чи лежать на одній прямій точки  $A, B, C$ , якщо  $A(3; -7; 8)$ ,  $B(-5; 4; 1)$ ,  $C(27; -40; 29)$ ?
- в) Знайдіть координати точки  $C$  такої, що  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ , якщо  $A(-5; 7; 12)$ ,  $B(4; -8; 3)$ .
- г) Знайдіть координати векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{a}$ , якщо  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{c}(4; -1; 5)$ ,  $\vec{d}(6; 3; 1)$ .
- д) Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють 7; 1; 8?
- е) Спростіть:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$ ;  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{NM}$ .
5. Що називається добутком вектора  $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$  на число  $\lambda$ ? Які вектори називаються колінеарними? Яка умова колінеарності ненульових векторів?

### Завдання.

- а) Дано  $\vec{a}(1; -2; 3)$ ,  $\vec{b}(-2; 1; -3)$ . Знайдіть координати векторів  $2\vec{a}$ ;  $-3\vec{b}$ ;  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ;  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
- б) Знайдіть  $|2\vec{a}|$ , якщо  $\vec{a}(1; 2; 2)$ .
- в) Чи колінеарні вектори  $\vec{a}(2; 3; 8)$  і  $\vec{b}(-4; 6; -16)$  ?
- г) При якому значенні  $m$  і  $n$  вектори  $\vec{a}(15; m; 1)$  і  $\vec{b}(18; 12; n)$  колінеарні?
- д) Чи колінеарні вектори  $AB$  і  $CD$ , якщо  $A(3; -2; 5)$ ,  $B(-1; 4; 7)$ ,  $C(1; 3; 6)$ ,  $D(-3; 9; 18)$ ?
- е) При яких значеннях  $m$  і  $n$  вектори  $AB$  і  $CD$  колінеарні, якщо  $A(1; 0; 2)$ ,  $B(3; n; 5)$ ,  $C(2; 2; 0)$ ,  $D(5; 4; m)$ ?
6. Три вектори називають **компланарними**, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розміщені в паралельних площинах. Вектори  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  і  $\overrightarrow{OC}$  компланарні тільки за умови, що точки  $O, A, B, C$  лежать в одній площині.

### Завдання.

- а) Чи компланарні вектори  $\vec{a}(3; 2; 0)$ ,  $\vec{b}(6; 3; 0)$ ,  $\vec{c}(8; 1; 0)$ ?  
 б) ABCD — тетраедр, К, Р, Т — середини його ребер АВ, АС і АД. Чи компланарні вектори  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  і  $\overrightarrow{KP}$ ;  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{KT}$  і  $\overrightarrow{CB}$ ?

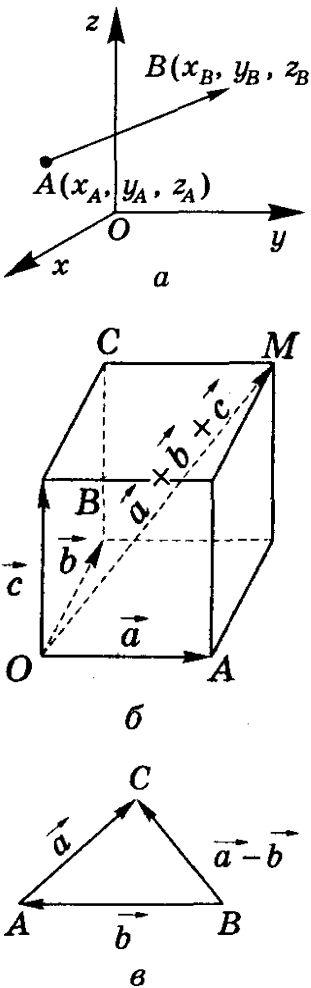
### III. Домашнє завдання

§ 12 - Істер [1] (с. 332-341), задачі № 12.2, 12.4, і 12.8, 12.10, 12.16, 12.21.

§ 13 - Істер [1] (с. 341-349), задачі № 13.2, 13.8, і 13.12, 13.16, 13.20, 13.26, 13.28, 13.30, 13.38, 13.40, 13.42

### IV. Підведення підсумку заняття

Підведення підсумку заняття доречно провести з використанням даної схеми.

Вектори в просторі	
 <p>а</p> <p>б</p> <p>в</p>	<p><b>Координати вектора (рис. а)</b></p> $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
	<p><b>Довжина вектора</b></p> $\vec{a} (a_x; a_y; a_z):  \vec{a}  = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
	<p><b>Рівність векторів</b></p> $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) = \vec{b} (b_x; b_y; b_z) \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x; \\ a_y = b_y; \\ a_z = b_z \end{cases}$
	<p><b>Сума векторів (рис. б)</b></p> $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) + \vec{b} (b_x; b_y; b_z) = \vec{c} (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z).$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}$
	<p><b>Різниця векторів (рис. в)</b></p> $\vec{a} (a_x; a_y; a_z) - \vec{b} (b_x; b_y; b_z) = \vec{c} (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z).$ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
	<p><b>Добуток вектора на число</b></p> $\lambda \cdot \vec{a} (a_x; a_y; a_z) = \vec{c} (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$
<p><b>Колінеарні вектори</b></p> <p><math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math> колінеарні, якщо</p> $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$	