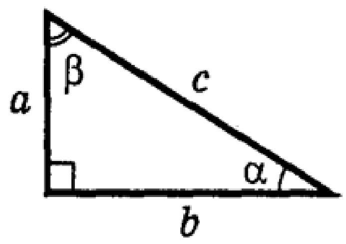
Тригонометричні функції гострих кутів прямокутного трикутника



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

Значення тригонометричних функцій

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує

Тригонометричні тотожності

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

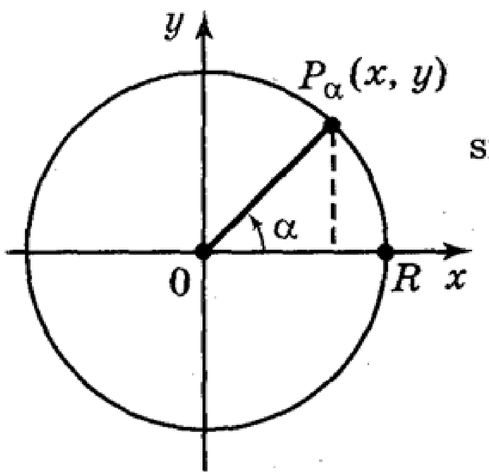
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

Тригонометричні функції довільного кута



$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \cos\alpha = \frac{x}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

З основної тригонометричної тотожності можна виразити sin α через cos α і навпаки. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$\text{tg}\alpha \cdot \text{ctg}\alpha = 1$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha};\ ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \text{де}\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \text{де}\ \alpha \neq \pi k, k \in Z.$$

Тригонометричні функції суми та різниці кутів

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta. \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (4)$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} \qquad (5)$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} \qquad (6)$$

Тригонометричні функції подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$соз\ 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Тригонометричні функції половинного аргументу

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Формули перетворення суми у добуток

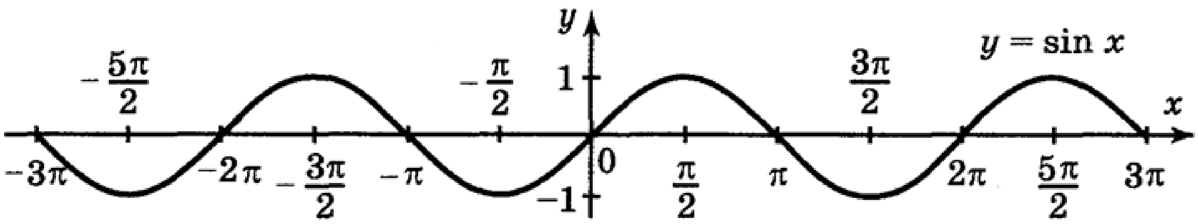
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\ \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2};\quad tgx\pm tgy=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

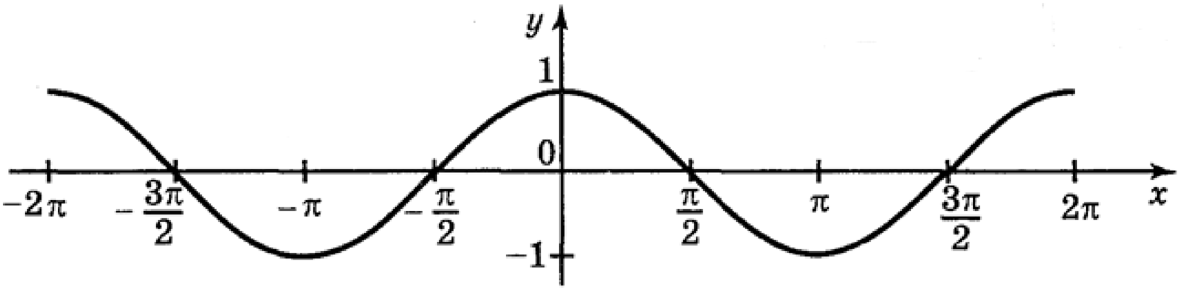
добутку у суму

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y)).$$

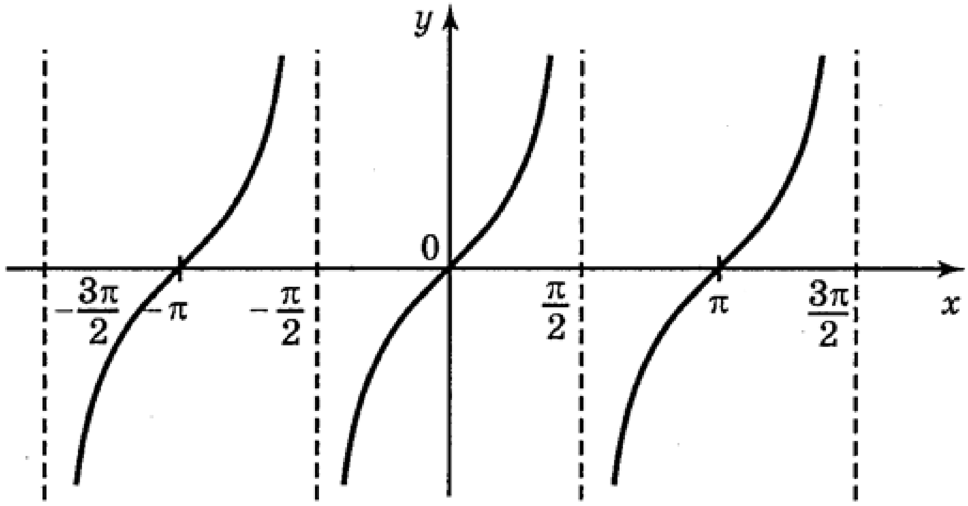
Графік функції *y* = sin *x*



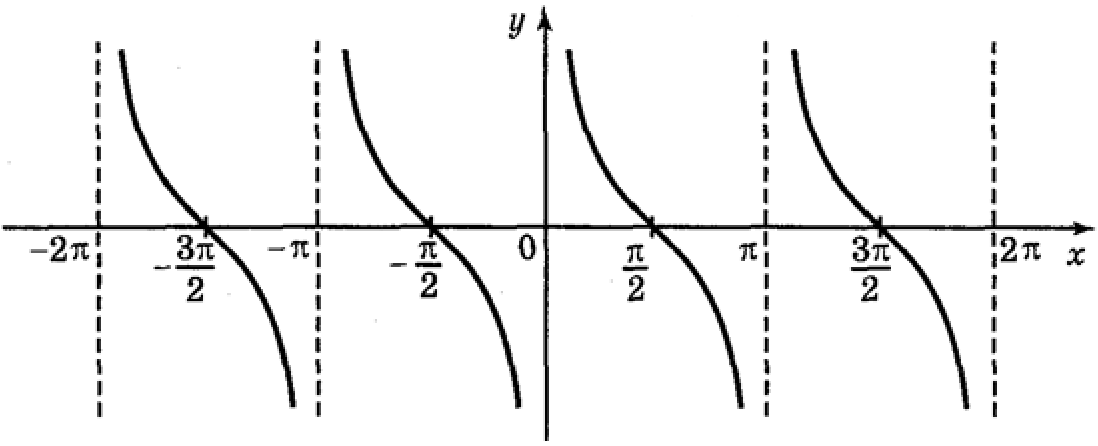
Графік функції *y* = cos *x*



Графік функції *y* = tg *x*



Графік функції *y = ctg x*



Функція $y = arcsin\ x$ є оберненою до функції $y = sin\ x$, де $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Функція $y = arccos\ x$ є оберненою до функції $y = cos\ x, де\, 0 \leq x \leq \pi$

Ця функція $y = arctg\ x$ є оберненою до функції $y = tg\ x, де\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$y = arcctg\ x$, тобто функцію, обернену до функції $y = ctg\ x$, де $x \in (0; \pi)$.

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin *a*	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos *a*	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
arctg *a*	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcctg *a*	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$\boxed{\sin x = a}$

$|a| > 1$

Розв`язків немає.

$|a| \le 1$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z.$

$\boxed{\sin x = 0}$; $x = \pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\sin x = 1}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\sin x = -1}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{tg x = a}$

$x = arctg\ a + \pi k, \quad k \in Z$

$tg x = 0; \quad x = \pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\cos x = a}$

$|a| > 1$

Розв`язків немає.

$|a| \le 1$

$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\cos x = 0}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\cos x = 1}$; $x = 2\pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{\cos x = -1}$; $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

$\boxed{ctg x = a}$

$x = arcctg\ a + \pi k, \quad k \in Z$

$ctg x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$