ЛЕКЦІЯ 6

Тема: Найпростіші тригонометричні рівняння.

І. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

На заняттях математики ви неодноразово розв'язували задачу: обчислити значення функції $y = f(x)$ при заданому значенні x_0 аргументу. Іноді потрібно розв'язати і обернену задачу: обчислити значення аргументу x, при якому функція $y = f(x)$ набуває даного значення y_0.

При розв'язуванні оберненої задачі виникають питання: Скільки таких значень існує? При яких умовах задача має єдиний розв'язок?

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай задано функцію $y = 2x + 1$. Щоб знайти значення аргументу x, при яких функція дорівнює y_0, треба розв'язати рівняння $y_0 = 2x + 1$. Розв'язавши його $2x = y_0 - 1$; $x = \frac{y_0 - 1}{2}$, маємо, що для будь-якого y_0 рівняння $y_0 = 2x + 1$ має і притому тільки один корінь.

Приклад 2. Для функції $y = x^2$ рівняння $y_0 = x^2$ при $y_0 > 0$ має два корені: $x_1 = -\sqrt{y_0}$; $x_2 = \sqrt{y_0}$.

Функція, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називається оборотною. Таким чином, функція $y = 2x + 1$ — оборотна, а функція $y = x^2$ (визначена на всій числовій осі) не є оборотною.

Залежність із прикладу 1: $x = \frac{y_0 - 1}{2}$ виражає x як деяку функцію від y (аргумент цієї функції позначений літерою y, а значення функції — літерою x). Перейшовши до звичних позначень (аргумент — x, функція — y), матимемо функцію: $y = \frac{x - 1}{2}$, яка називається оберненою до функції $y = 2x + 1$.

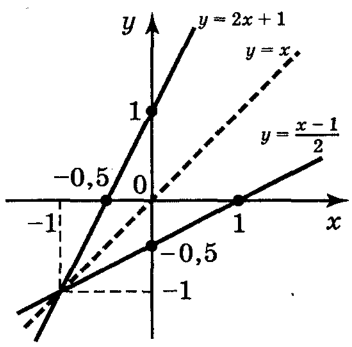


Рис. 102

Побудуємо графіки функцій $y = 2x + 1$ і $y = \frac{x - 1}{2}$ в одній системі координат (рис. 102), графіки цих функцій розташовані симетрично відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Виконання вправи.

З'ясуйте, чи оборотна функція $y = \frac{1}{x - 1}$ в області її визначення. Якщо дана функція оборотна, то задайте обернену до неї функцію і побудуйте графіки даної і оберненої функцій.

Розв'язання.

Оскільки функція $y = \frac{1}{x - 1}$ набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення ($x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$), то дана функція оборотна.

Розв'яжемо рівняння $y=\dfrac{1}{x-1}$ відносно *x:*

$y(x-1)=1$, $x-1=\dfrac{1}{y}$, $x=\dfrac{1}{y}+1$.

Замінивши *x* на *y,* й *y* на *x* маємо **y** = $\dfrac{1}{x}+1$ — обернену функцію *x* до функції $y=\dfrac{1}{x-1}$.

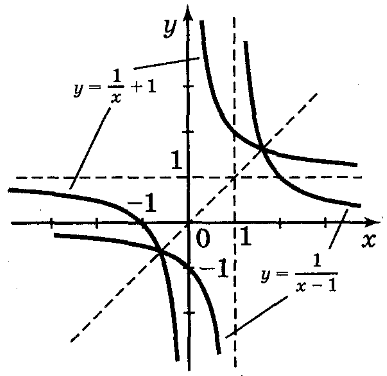


Рис. 103

Побудуємо графіки функцій $y=\dfrac{1}{x-1}$ та $y=\dfrac{1}{x}+1$ в одній системі координат (рис. 103).

Підведемо підсумки:

1) Якщо функція у = *f(x)* задана формулою, то для знаходження оберненої функції потрібно розв'язати рівняння *f(x) = y* відносно *x,* а потім поміняти місцями *x* і *y.* Якщо рівняння *f(x) = y* має більше ніж один корінь, то функції, оберненої до функції *y = f(x)* не існує.
2) Графіки даної функції і оберненої до даної симетричні відносно прямої *y = x.*
   Дійсно, при симетрії відносно прямої *y = x* вісь абсцис переходить у вісь ординат, а вісь ординат переходить у вісь абсцис, будь-яка точка *(a; b)* координатної площини при симетрії відносно прямої *y = x* переходить у точку *(b; a)* (рис. 104). Якщо точка *(a; b)* належить графіку даної функції, то точка *(b; a)* належить графіку оберненої функції, а ці дві точки симетричні відносно прямої *y = x.*

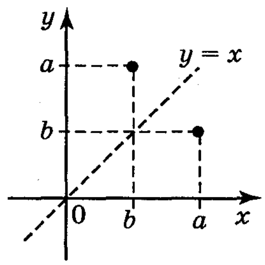


Рис. 104

3) Якщо функція *y = f(x)* зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона оборотна. Обернена функція до даної, визначена області значень функції *y = f(x),* також є зростаючою (спадною).

Приклад 3. Функція $y=x^2$ не є оборотною в області визначення. Проте функція $y=x^2$, де $x\in[0;+\infty)$ зростає на цьому проміжку, тому має обернену. Оберненою функцією є функція $y=\sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на рис. 105.

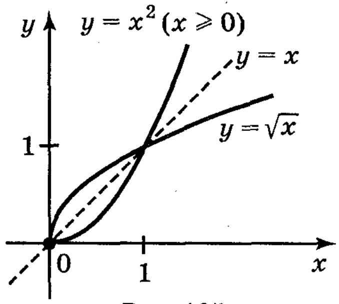


Рис. 105

<u>Виконання вправ</u>

1. Які із поданих функцій є оборотними в області визначення:

а) $y=5x+4$; б) $y=x^3+1$; в) $y=x^2-1$; г) $y=\dfrac{5}{x-5}$; д) $y=\sin x$; є) $y=\sqrt{x-2}$?

Відповідь: а); б); г); є).

2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

а) $y=x-3$; б) $y=\dfrac{1}{x}$; в) $y=\sqrt{x+1}$; г) $y=x^2$, де $x\in(-\infty;0]$.

Відповідь: а) $y=x+3$; б) $y=\dfrac{1}{x}$; в) $y=x^2-1$, де $x\in[0;+\infty)$; г) $y=-\sqrt{x}$.

3. На одному і тому же рисунку побудуйте графік даної функції і функції,

оберненої до даної:

а) $y = x^2 - 1,\ x > 0$; б) $y = (x - 1)^2,\ x > 1$;

в) $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $y = \cos x,\ x \in [0; \pi]$.

Відповідь: а) рис. 106; б) рис. 107; в) рис. 108; г) рис. 109.

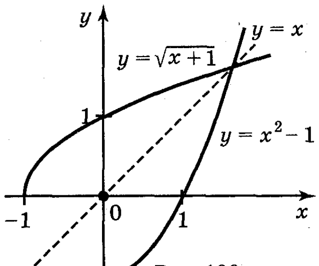


Рис. 106

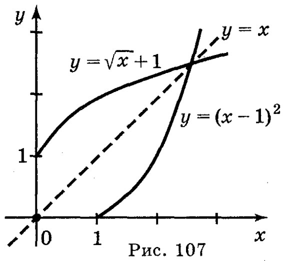


Рис. 107

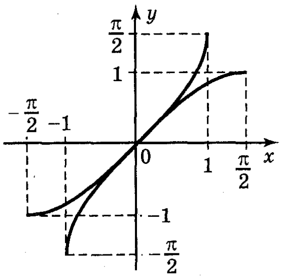


Рис. 108

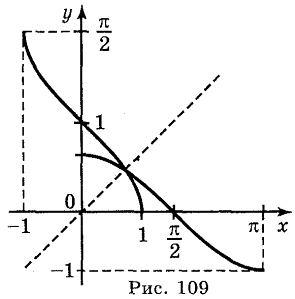


Рис. 109

4. Скільки коренів має рівняння (розв'язати графічно):

а) $x^3 + x = 2$; б) $\sin x = 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\sin x = 1$?

Відповідь: а) один; б) один; в) безліч.

II. Сприймання і усвідомлення поняття arcsin *α* і властивостей функції *y* = arcsin *x*.

Як ви знаєте, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і приймає всі значення від -1 до 1, тобто кожне своє значення функція приймає в єдиній точці області визначення. Отже, рівняння $\sin x = a$, $|a| \le 1$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який називається арксинусом числа a і позначається $\arcsin a$.

! *Арксинусом* числа a називається таке число із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус якого дорівнює a.

Приклад 1. Знайдемо $\arcsin \frac{1}{2}$.

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, бо $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Приклад 2. Знайдемо $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) arcsin 0; б) arcsin 1; в) arcsin (-1);

г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; є) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Відповідь: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{3}$.

2. Які із поданих виразів мають смисл і чому:

а) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$; б) arcsin 1,5; в) $\arcsin \pi$; г) $\arcsin \left(\sqrt{2}-1\right)$; д) $\arcsin \frac{1}{\pi}$?

Відповідь: а); г); д).

3. Знайдіть:

а) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки кожному значенню $x \in [-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине значення arcsin *x*, то можна говорити, що існує функція $y = \arcsin x$. Графік функції $y = \arcsin x$ одержимо із графіка функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (рис. 110).

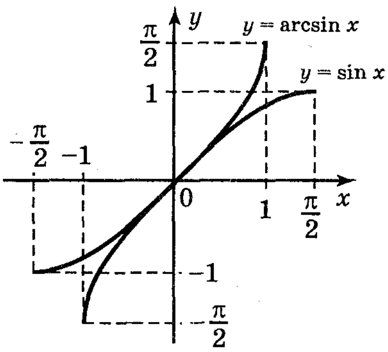


Рис. 110

Розглянемо властивості функції $y = \arcsin x$.

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Графік симетричний відносно початку координат (функція непарна) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

4. Функція зростаюча. Якщо $x_1 > x_2$ то $\arcsin x_1 > \arcsin x_2$

5. $y = 0$, якщо $x = 0$.

6. $y_{\max} = y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Виконання вправ

1. Порівняйте числа:

а) arcsin 0,3 і arcsin 0,2; б) arcsin 0,3 і arcsin (-0,3); в) $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right)$ і $\arcsin \left(-\frac{1}{4}\right)$.

Відповідь:

а) arcsin 0,3 > arcsin 0,2; б) arcsin 0,3 > arcsin (-0,3); в) $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right) < \arcsin \left(-\frac{1}{4}\right)$.

2. Розташуйте в порядку зростання:

а) arcsin 0,4; arcsin 0,2; arcsin 0,8;

б) arcsin (-0,1); arcsin (-0,2); arcsin (-0,3);

в) arcsin$\frac{\pi}{6}$; arcsin (-0,3); arcsin 0,9.

Відповідь: а) arcsin 0,2; arcsin 0,4; arcsin 0,8;

б) arcsin (-0,3); arcsin (-0,2); arcsin (-0,1);

в) arcsin (-0,3); arcsin $\frac{\pi}{6}$; arcsin 0,9.

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) y = arcsin (x + 1); б) y = arcsin (x^2 - 1); в) y = arcsin $\frac{1}{x-1}$; г) y = arcsin 5x.

Відповідь: а) $x \in [-2; 0]$; б) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; в) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; г) $x \in [-0,2; 0,2]$.

4. Знайдіть область значень функцій:

а) y = arcsin $\sqrt{x}$; б) y = arcsin $\left(-\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: а) $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

5. Побудуйте графіки функцій:

а) y = arcsin (x - 1); б) $y = \frac{\pi}{2}$ + arcsin x ; в) y = arcsin | x |; г) y = | arcsin x |.

Відповідь: а) рис. 111; б) рис. 112; в) рис. 113; г)рис. 114.

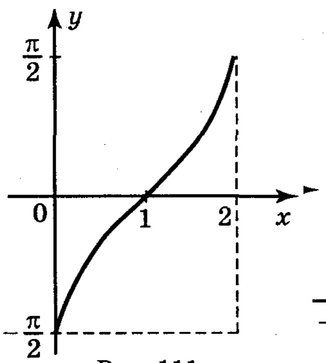


Рис. 111

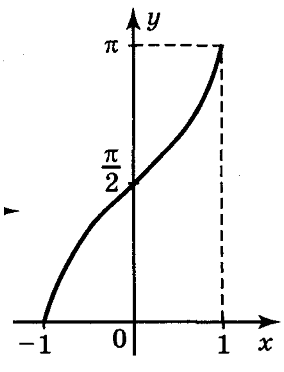


Рис. 112

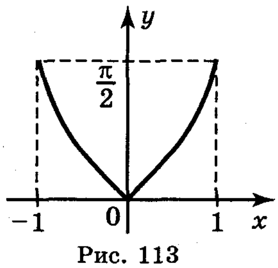


Рис. 113

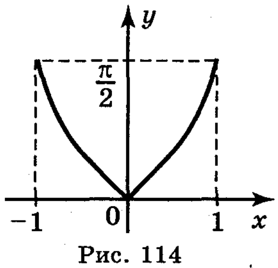


Рис. 114

III. Сприймання і усвідомлення поняття arccos *a* і властивостей функції *y* = arccos *x*.

Функція y = cos x спадає на відрізку [0; π] і приймає всі значення від -1 до 1, тому рівняння cos x = a, $|a| < 1$ на проміжку [0; π] має єдиний корінь, який називається арккосинусом числа a і позначається arccos a.

! *Арккосинусом* числа a називається таке число з проміжку [0; π], косинус якого дорівнює a.

Приклад 1. Знайдіть arccos $\frac{1}{2}$.

$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in [0;\pi]$.

Приклад 2. Знайдіть arccos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, бо $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{3\pi}{4} \in [0;\pi]$.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) arccos 0;

г) arccos (-1); д) arccos 1; є) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) π; д) 0; є) $\frac{5\pi}{6}$.

2. Які з поданих виразів мають смисл і чому:

а) $\arccos\sqrt{2}$; б) $\arccos\frac{a^2}{a^2+1}$; в) arccos $\frac{a^2+2}{a^2+1}$;

г) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; є) $\arccos\frac{1}{\pi}$?

Відповідь: б); д); е).

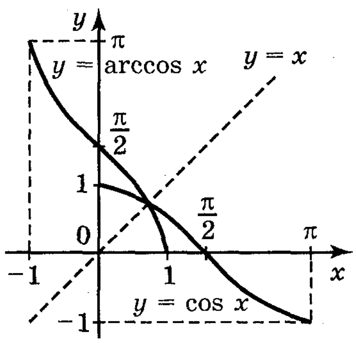


Рис. 115

3. Знайдіть:

а) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; в) cos (arccos (-1)).

Відповідь: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в)-1.

Аналогічно можна говорити про функцію y = arccos x. Графік функції y = arccos x одержимо із графіка функції y = cos x, $x \in [0; \pi]$ перетворенням симетрії відносно прямої y = x (рис. 115).

Розглянемо властивості функції y = arccos x.

1. $D(y)$ = [-1; 1].
2. E(y)=[0;π].
3. Графік не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі OY.

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

4. Функція спадна. Якщо $x_1 > x_2$ то $\arccos x_1 < \arccos x_2$.

5. $y = 0$, якщо $x = 1$.

6. $y_{\max} = y(-1) = \pi$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

Виконання вправ

1. Порівняйте числа:

а) arccos 0,1 і arccos 0,2; б) arccos 0,1 і arccos (-0,1); в) arccos (-0,2) і arccos (-0,3).

Відповідь: а) arccos 0,1 > arccos 0,2; б) arccos 0,1 < arccos (-0,1);

в) arccos (-0,2) < arccos (-0,3).

2. Розташуйте числа в порядку зростання:

а) arccos 0,55; arccos 0,7; arccos 0,1;

б) arccos (-0,3); arccos (-0,7); arccos (-0,9);

в) $\arccos \frac{1}{\pi}$; arccos (-0,3); arccos (-0,7).

Відповідь: а) arccos 0,7; arccos 0,55; arccos 0,1;

б) arccos (-0,3); arccos (-0,7); arccos (-0,9);

в) $\arccos \frac{1}{\pi}$; arccos (-0,3); arccos (-0,7).

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \arccos(x - 1)$; б) $y = \arccos 2x$; в) $y = \arccos(x^2 + 1)$; г) $y = \arccos(|x| - 1)$.

Відповідь: а) $x \in [0; 2]$; б) $x \in [-0,5; 0,5]$; в) $x \in \{0\}$; г) $x \in [-2; 2]$.

4. Знайдіть область значень функцій:

а) $y = \arccos |x|$; б) $y = \arccos(-|x|)$.

Відповідь: а) $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \arccos(x - 1) - \frac{\pi}{2}$; б) $y = \arccos|x| - \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \left|\arccos x - \frac{\pi}{2}\right|$; г) $y = \left|\arccos|x| - \frac{\pi}{2}\right|$.

Відповідь: а) рис. 116; б) рис. 117; в) рис. 118; г) рис. 119.

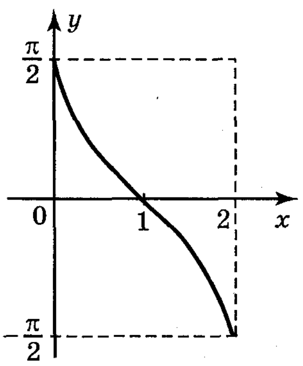


Рис. 116

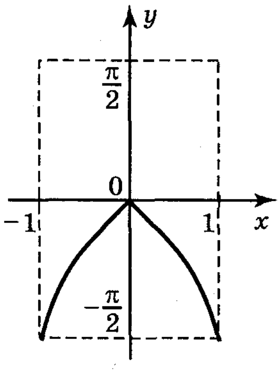


Рис. 117

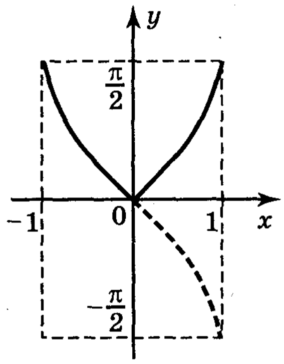


Рис. 118

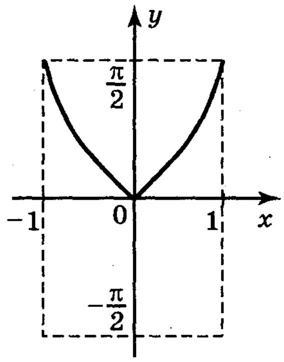


Рис. 119

IV. Сприймання і усвідомлення поняття arctg *a* і властивостей функції *y* = arctg *x*.

Функція $y = tg\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ зростає і приймає всі значення із *R*, тому для будь-якого *a* рівняння tg $x = a$ має єдиний корінь із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, який називається арктангенсом числа *a* і позначається arctg *a*.

! *Арктангенсом* числа *a* називається таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює *a*.

Приклад 1. $arctg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, *бо* $tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ і , $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 2. $arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$,бо $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) arctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) arctg 0; в) arctg 1; г) arctg $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; д) arctg $(-\sqrt{3})$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{6}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{\pi}{3}$.

2. Які з поданих виразів мають смисл:

а) arctg π; б) arctg $\frac{1}{\pi}$; в) arctg π^2?

Відповідь: а); б); в).

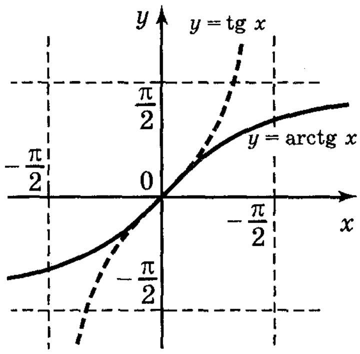


Рис. 120

Графік функції y = arctg x: одержимо із графіка функції y = tg x, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (рис. 120).

Розглянемо властивості функції y = arctg x:

1. D(y)=R.

2. E(y) = $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Графік симетричний відносно початку координат, функція непарна: arctg (-x) = - arctg x.

4. Функція зростаюча. Якщо $x_1 < x_2$ то arctg x_1 < arctg x_2

5. y = 0, якщо x = 0.

6. y > 0, якщо x > 0; y < 0, якщо x < 0.

Виконання вправ

1. Порівняйте числа:

а) arctg (-3) і arctg 2; б) arctg (-5) і arctg 0; в) arctg $\sqrt{3}$ і arctg $\sqrt{2}$.

Відповідь: 4) arctg (-3) < arctg 2; б) arctg (-5) < arctg 0; в) arcrg $\sqrt{3}$ > arctg $\sqrt{2}$.

2. Розташуйте в порядку зростання числа:

а) arctg 50; arctg (-5); arctg 0,5; б) arctg 1,2; arctg π; arctg (-3). *Відповідь:* а) arctg (-5); arctg 0,5; arctg 50; б) arctg (-3); arctg 1,2; arctg π.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) arctg(5x – 1) = $\frac{\pi}{4}$; б) arctg(3 – 5x) = - $\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: а) $x = \frac{2}{5}$; б) $x = \frac{3+\sqrt{3}}{5}$.

V. Сприймання і усвідомлення поняття arcctg *a* і властивостей функції *y* = arcctg *x*.

Функція y = ctg x на інтервалі (0; π*)* спадає і приймає всі значення із R, тому для будь-якого числа a в інтервалі (0; π) існує єдиний корінь рівняння ctg x = a. Це число називають арккотангенсом числа a і позначають arcctg a.

Арккотангенсом числа a називається таке число із інтервалу (0; π*)*, котангенс якого дорівнює a.

Приклад 1. arcctg $\sqrt{3}$ = $\frac{\pi}{6}$, бо ctg $\frac{\pi}{6}$ = $\sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{6}$ ∈ (0; π).

Приклад 2. arcctg $\left(-\sqrt{3}\right)$ = $\frac{5\pi}{6}$, бо ctg $\frac{5\pi}{6}$ = -$\sqrt{3}$ і $\frac{5\pi}{6}$ ∈ (0; π).

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) arcctg 1; б) arcctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) arcctg 0; г) arcctg (-1); д) arcctg $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{2\pi}{3}$.

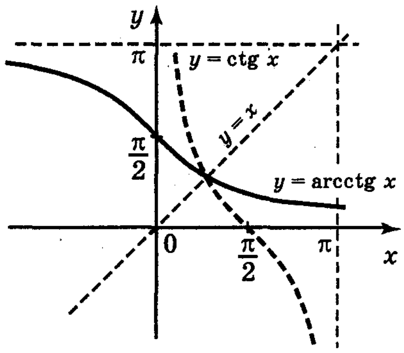


Рис. 121

Графік функції y = arcctg x можна одержати із графіка функції y = ctg x у результаті перетворення симетрії відносно прямої $y = x$ (рис. 121).

Укажемо властивості функції y = arcctg x:

1. $D(y)=R$.
2. $E(y) = (0; \pi)$.
3. Графік не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі OY. arcctg $(-x) = \pi$ - arcctg x.
4. Функція спадна. Якщо $x_1 < x_2$ то arcctg x_1 > arcctg x_2.
5. $x = 0$, якщо $y = \frac{\pi}{2}$.
6. $y > O$ для всіх $x \in R$.

Значення обернених тригонометричних функцій можна обчислювати за допомогою таблиць або мікрокалькулятора.

VI. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування рівняння cos t = *a*.

Демонструється таблиця1.

Пояснення вчителя

1. Якщо $|a| > 1$, то рівняння cos $t = a$ не має розв'язків, по-скільки $|\cos t| < 1$ для будь-якого t.
2. Якщо $|a| < 1$, то враховуючи те, що cos t — абсциса точки P_t одиничного кола, маємо: абсцису, рівну a, мають дві точки (рис. 122) одиничного кола(на осі OX відкладемо число a і через побудовану точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі абсцис, яка перетне коло у двох точках P_{t_1} і P_{t_2}. Тоді

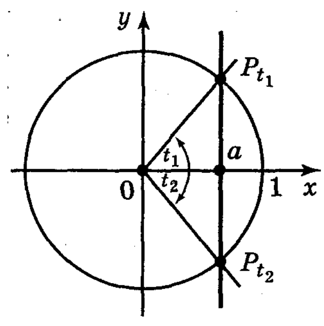


Рис. 122

t_1 = arccos $a + 2\pi n$, $n \in$ **Z,**

t_2 = - arccos $a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ці розв'язки можна об'єднати

$$\boxed{t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z} \qquad (1)$$

3. Якщо $a = 1$, то, враховуючи те, що cos t — це абсциса точки P_t одиничного кола, маємо: абсцису, рівну 1, має точка P_t утворена із точки $P_0(1; 0)$ поворотом на кути $2\pi n$, $n \in Z$. Отже, $t = 0 + 2\pi n = 2\pi n$, $n \in Z$.
4. Якщо $a = -1$, то маємо $t = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Корені рівнянь: cos t = 1, cos t = -1, *cos* t = 0 також можна одержати із формули t = ± arccos $a + 2\pi n$, $n \in Z$. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо:

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Оскільки $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то маємо: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння cos $x = \sqrt{2}$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{2} > 1$, то рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння cos x = 0,37.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо:

$$x = \arccos 0{,}37 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Значення arccos 0,37 знайдемо за допомогою мікрокалькулятора: $\arccos 0{,}37 \approx 1{,}19$, тоді $x \approx \pm 1{,}19 + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\arccos 0{,}37 + 2\pi n \approx \pm 1{,}19 + 2\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння cos $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$.

Оскільки $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, то

$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

VII. Осмислення вивченого матеріалу.

Виконання вправ

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $-2\cos x = 1$; б) $\cos 2x - 1 = 0$; в) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Відповідь: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\pi n,\ n \in Z$; в) $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{15} \pm \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$.

2. а) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$; б) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 1$;
в) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}5$; г) $2\sin^2 x = 1$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; б) $2\pi n,\ n \in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

3. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $\cos x + 3\cos x = 0$;
в) $4\cos^2 x - 3 = 0$; г) $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$.

Відповідь: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

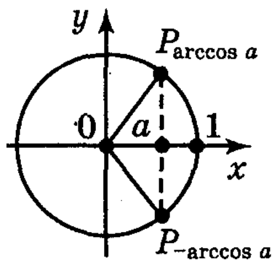
в) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$ і $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

4. а) $(1+\cos x)(3-2\cos x)=0$;

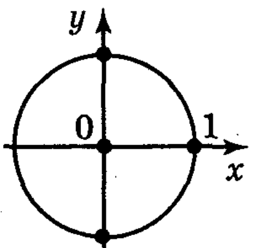
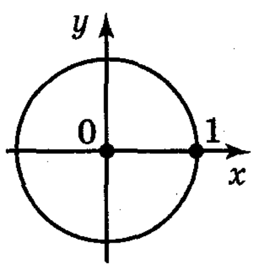
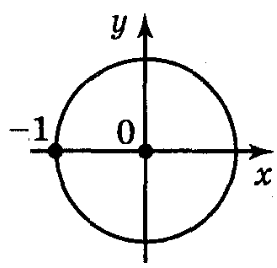
Відповідь: а) $\pi+2\pi n,\ n\in Z$.

Таблиця1

Рівняння $\cos t = a$

$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \le 1$
Коренів немає, бо $\lvert\cos t\rvert \le 1$.	 $t=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z$

Окремі випадки

$\cos t = 0$	$\cos t = 1$	$\cos t = -1$
 $t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	 $t=2\pi n,\ n\in Z$	 $t=\pi+2\pi n,\ n\in Z$

VIII. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування рівняння $\sin t = a$.

Демонструється таблиця2.

Пояснення

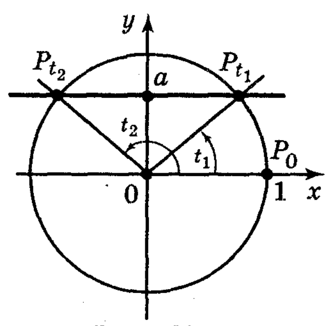


Рис. 123.

1) Якщо $|a| > 1$, то рівняння не має розв'язків, поскільки $|\sin x| \le 1$ для будь-якого t.
2) Якщо $|a| < 1$, то, враховуючи те, що $\sin t$ — ордината точки P_t одиничного кола, маємо: ординату, рівну a, мають дві точки одиничного кола (на осі OY відкладаємо число a і через цю точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі ординат (рис. 123), яка перетне коло у двох токах - P_{t_1} і P_{t_2}):

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ці дві формули можна записати у вигляді однієї формули:

$$\boxed{t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z} \qquad (1)$$

Неважко впевнитися, що при парному $k = 2n$ маємо:

$t_1 = (-1)^{2n} \arcsin a + 2\pi n$ або $t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z;$

при непарному $k = 2n + 1$ маємо:

$$t_2 = (-1)^{2n+1} \arcsin a + (2n + 1)\pi;$$

$$t_2 = - \arcsin a + 2\pi n + \pi;$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

3) Якщо $a = 1$, то, враховуючи те, що $\sin t$ — це ордината точки P_t(одиничного кола, маємо: ординату, рівну 1, має точка P_t утворена із точки $P_0(1;0)$ поворотом на кут $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Отже, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. Якщо $a = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. "

4) Якщо $a = 0$, маємо $t = 0 + \pi n;\ t = \pi n,\ n \in Z.$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in є\ Z.$

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in є\ Z.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

Оскільки $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, то $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z$; $x = (-1)^{n+1} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^{n+1} + \pi n,\ n \in Z.$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \sqrt{2} - 1$.

Розв'язання

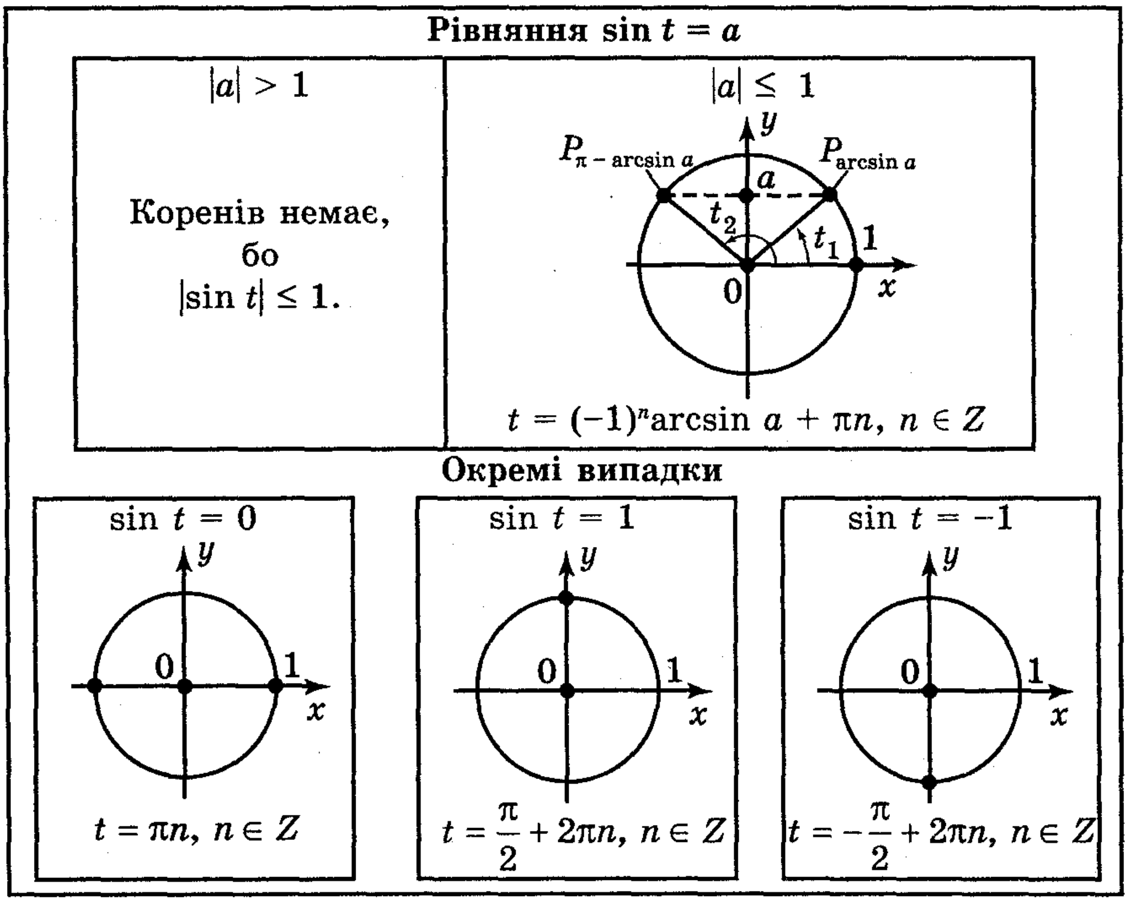
Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi n,\ n \in Z.$

Значення $\arcsin(\sqrt{2} - 1)$ знайдемо за допомогою мікрокалькулятора:

$\arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}427$, тоді $x \approx (-1)^n \cdot 0{,}427 + \pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \arcsin(\sqrt{2}-1) + \pi n \approx (-1)^n \cdot 0{,}427 + \pi n,\ n \in Z$.

Таблиця2



IX. Осмислення вивченого матеріалу.

Коментоване виконання вправ

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $2\sin x - 1 = 0$; б) $2\sin\frac{x}{2} = -1$; в) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n\in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z$;

в) $\frac{\pi}{12}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; г) $\frac{4\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$

2. а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}$;

в) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos 2x \sin 3x + \sin 2x \cos 3x = 1$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n\in Z$;

в) $\frac{3\pi}{7}(-1)^n\frac{3\pi}{7}+3\pi n,\ n\in Z$; г) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ n\in Z$.

3. а) $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$; б) $(4\sin 3x - 1)(2\sin x + 3) = 0$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ *і* $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $(-1)^n \dfrac{\arcsin\frac{1}{4}}{3} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

X. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування рівняння *tg t = a* (ctg *t = a*).

Демонструється таблиця3.

Пояснення

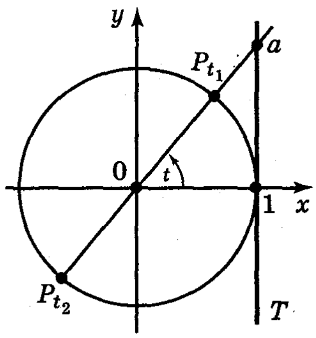


Рис. 124

Розв'язування рівняння tg $t = a$ зручно проілюструвати за допомогою лінії тангенсів (рис. 124). *tg t* — це ордината точки перетину прямої OP_t з лінією тангенсів. Відкладемо на осі тангенсів число *a,* через цю точку і початок координат проведемо пряму, яка перетне одиничне коло у двох точках P_{t_1} і P_{t_2}, тоді

$$\boxed{t = \text{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z} \qquad (1)$$

Отже, рівняння tg $t = a$ при будь-якому значенні a має розв'язок.

Рівняння ctg $t = a$, де $a \neq 0$ рівносильне рівнянню tg $t = \frac{1}{a}$.

Проте можна довести, що розв'язки рівняння ctg $t = a$ можна записати у вигляді:

$$\boxed{t = \text{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z} \qquad (2)$$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння tg $x = \sqrt{3}$.

Розв'язання

По формулі (1) знаходимо $x = \text{arctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Оскільки $\text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, то маємо: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння tg $x = 2$.

Розв'язання

За формулою (1) маємо: $x = \text{arctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z$. Значення arctg 2 можна знайти за допомогою мікрокалькулятора $\text{arctg}2 \approx 1{,}1$, тоді $x \approx 1{,}1 + \pi n,\ n \in Z$.
Відповідь: $\text{arctg}\, 2 + \pi n \approx 1{,}1 + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння ctg $x - \sqrt{3} = 0$.

Розв'язання

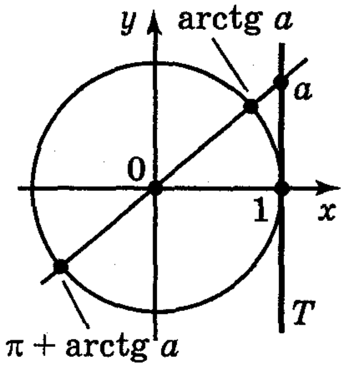
ctg $x - \sqrt{3} = 0$; ctg $x = \sqrt{3}$; tg $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \text{arctg}\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \pi n = \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Таблиця3

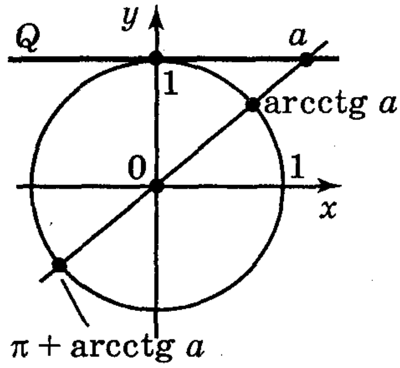
Рівняння

tg $t = a$



$t = \text{arctg}\ a + \pi n,\ n \in Z$

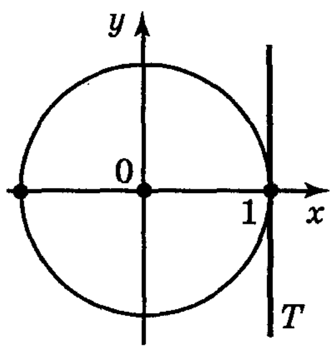
ctg $t = a$



$t = \text{arcctg}\ a + \pi n,\ n \in Z$

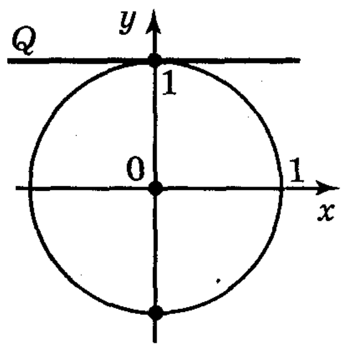
Окремі випадки

tg $t = 0$



$t = \pi n,\ n \in Z$

ctg $t = 0$



$t = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

XI. Осмислення вивченого матеріалу.

<u>Виконання вправ</u>

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $tg\ x + \sqrt{3} = 0$; б) ctg $x + 1 = 0$; в) $\sqrt{3}$ tg $x - 1 = 0$; г) $\sqrt{3}\,ctg\ x - 1 = 0.$

Відповідь: а) $-\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; б) $\dfrac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; в) $\dfrac{\pi}{6} + nn,\ n \in Z$; г) $\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

2. а) $\sqrt{3} tg\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3$; б) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = -1.$

Відповідь: а) $3\pi n,\ n \in Z$; б) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. а) $3\text{tg}^2 x + 2\ \text{tg}\ x - 1 = 0$; б) $2\text{ctg}^2 x + 3\text{ctg}\ x - 2 = 0$;

в) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;   г) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$.

Відповідь: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ і $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$;

б) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$ і $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$ і $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$;   г) πn і $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Домашнє завдання.
Конспект
[1 Істер. О. С.] Розділ 2, §16, ст.145-158.