

ЛЕКЦІЯ № 5

Тем: Формули додавання для тригонометричних функцій та наслідки з них.

I. Сприймання і усвідомлення формул додавання та наслідки з них.

Демонструється таблиця 1.

Таблиця 1

Формули перетворення суми у добуток

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; \quad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

добутку у суму

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Пояснення

1. Виведемо формулу перетворення суми синусів в добуток.

Позначимо $\frac{x+y}{2} = \alpha$, $\frac{x-y}{2} = \beta$, тоді $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, і тому

1) $\sin x + \sin y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. Отже, сума синусів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми на косинус піврізниці.

Для суми косинусів маємо:

2) $\cos x + \cos y = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. Отже, сума косинусів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми на косинус піврізниці.

Для різниці косинусів маємо:

3) $\cos x - \cos y = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -2 \sin \alpha \sin \beta = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$. Отже, різниця косинусів дорівнює числу, протилежному подвоєному добутку синуса півсуми на синус піврізниці.

4) $\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$. Отже, різниця синусів

дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці на косинус півсуми.

2. Для одержання формул перетворення добутку у суму випишемо підряд чотири формули:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \quad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \quad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (4)$$

Віднявши почленно із рівності (4) рівність (3), одержимо:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$$

або

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Добуток синусів двох чисел дорівнює піврізниці косинуса різниці і косинуса суми цих чисел.

Додавши почленно рівності (4) і (3), маємо:

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2 \cos x \cos y$$

або

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Добуток косинусів двох чисел дорівнює півсумі косинуса різниці і косинуса суми цих чисел.

Додавши почленно рівності (1) і (2), одержимо

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2 \sin x \cos y$$

або

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Добуток синуса одного числа на косинус другого числа дорівнює півсумі синуса різниці і синуса суми цих чисел.

Виконання вправ

1. Спростіть вирази:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$; б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

в) $\sin \alpha \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Відповідь: а) $\sqrt{2} \sin \beta$; б) $\sin 2\alpha$; в) $-\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{3} \cos \alpha$.

2. Обчисліть:

а) $\cos 22^\circ - \cos 38^\circ$; б) $\sin 5^\circ + \sin 55^\circ$.

Відповідь: а) $\sin 8^\circ$; б) $\cos 25^\circ$.

3. Перетворіть в добуток:

а) $\cos 2\alpha + \cos 14\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha$;

б) $\sin 4\beta + \sin 10\beta + \sin 22\beta + \sin 16\beta$.

Відповідь: а) $4\cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha$; б) $4 \cos 3\beta \cos 6\beta \sin 13\beta$.

4. Доведіть тотожність:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2 \sin \alpha$; б) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ 2, §13, §14, §15, ст.121-145.