ЛЕКЦІЯ № 4

Тема заняття: Властивості та графіки тригонометричних функцій.

І. Вивчення властивостей тригонометричних функцій.

Властивості вивчених тригонометричних функцій зручно записати в таблицю 5. При заповненні таблиці можливі такі коментарі:

1. Вирази sin x і cos x визначені для будь-яких x, оскільки для будь-якого числа x можна знайти координати точки P_α, одиничного кола.

Вираз tg x має смисл при будь-якому x, крім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in$ Z.

Вираз ctg x має смисл при будь-якому x, крім чисел виду $x = \pi n$, $n \in$ Z.

2. Оскільки sin x і cos x — це ордината і абсциса точки P_α одиничного кола, то областю значення синуса і косинуса є проміжок [-1; 1].

Оскільки tg α — це ордината точки P_α лінії тангенсів, то областю значень тангенса є R.

Оскільки ctg α — це абсциса точки Q_α лінії котангенсів, то областю значень котангенса є R.

3. Оскільки точки P_α і $P_{-\alpha}$ одиничного кола (рис. 75) симетричні відносно осі OX, то ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати, тобто sin (-α) = -sin α; cos (-α) = cos α.

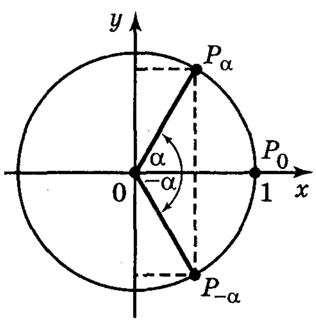

Рис. 75

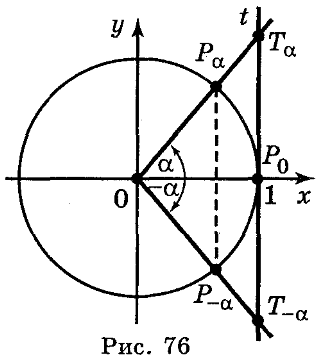

Рис. 76

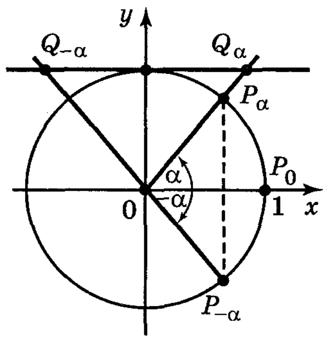

Рис. 77

Оскільки точки T_α і $T_{-\alpha}$ симетричні відносно P_0 лінії тангенсів, то tg (-α) = -tg α.

Оскільки точки Q_α і $Q_{-\alpha}$ симетричні (рис. 77) відносно точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ лінії котангенсів, то ctg (-α) = - ctg α.

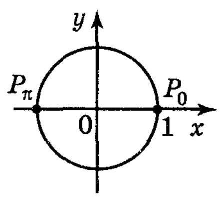

Рис. 78

Можна довести аналітичне, що tg α і ctg α непарні:

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha,$$

$$ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha.$$

4. Див. урок 8.

5. Ординату, рівну нулю, мають дві точки (рис. 78) одиничного кола: (1; 0) і (-1; 0). Ці точки утворюються із точки (1; 0) поворотом на кути 0, π, 2π, 3π і т. д., а також на кути -π, -2π... Отже, sin x = 0, якщо $x = nk$, $n \in Z$.

Абсцису, рівну нулю, мають дві точки одиничного кола: (0; 1) і (0; —1). Ці

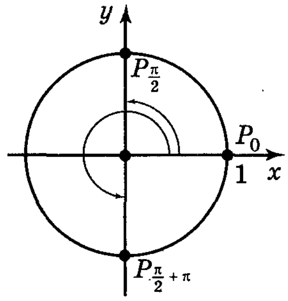

Рис. 79

точки утворюються із точки (1; 0) поворотом на кути $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\pi$; $\frac{\pi}{2}+2\pi$ і т.д., а також на кути $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}+\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi$, тобто на кути $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ (рис. 79). Отже, $\cos x = 0$, якщо $x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

6. Якщо кут α змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_α збільшується

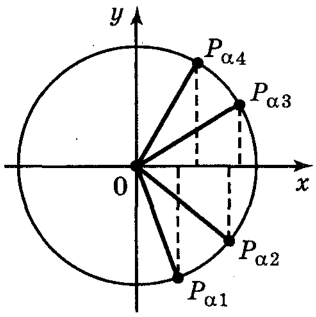

Рис. 80

від -1 до 1, тобто sin α зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, враховуючи, що найменшим періодом синуса є 2π, робимо висновок, що sin α зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ (рис. 80). Якщо кут α змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_α зменшується від 1 до -1, тобто sin α спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Враховуючи, що найменший період синуса є 2π, робимо висновок, що sin α спадає на проміжках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

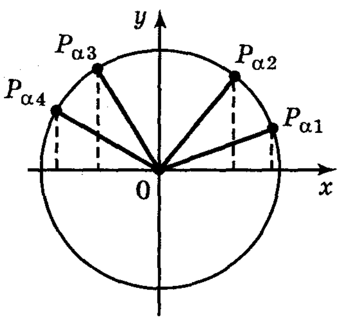

Рис. 81

7. Якщо кут α змінюється від 0 до π, то абсциса точки P_α зменшується від 1 до -1, тобто cos α спадає на проміжку [0; π], якщо кут α змінюється від -π до 0, то абсциса точки P_α збільшується від -1 до 1, тобто cos α зростає (рис. 81). Враховуючи, що найменший період косинуса є 2π, робимо висновок, що функція cos α спадає на проміжках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$ і зростає на проміжках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$, $n\in Z$.

8. При зміні кута α від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки T_α лінії тангенсів збільшується від $-\infty$ до $+\infty$, тобто tg α зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи, що найменший додатний період тангенса є π, робимо висновок, що tg α зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ (рис. 82).

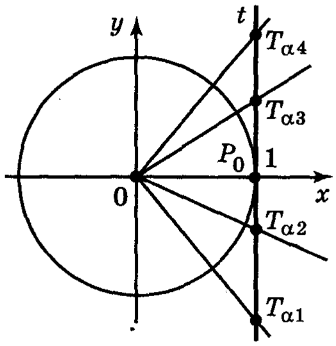

Рис. 82

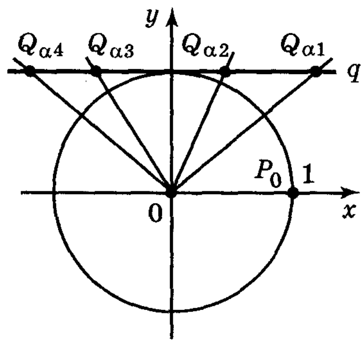

Рис. 83

9. При зміні кута α від 0 до π абсциса точки Q_α лінії котангенсів зменшується від $+\infty$ до $-\infty$, тобто ctg α спадає на проміжку (0; π). Враховуючи, що найменший додатний період котангенса є π, робимо висновок, що ctg α спадає на кожному з проміжків *(πn; π + πn), n∈Z* (рис. 83).

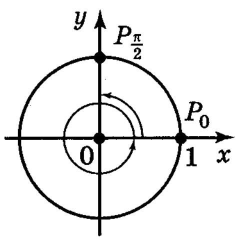

Рис. 84

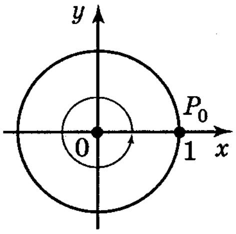

Рис. 85

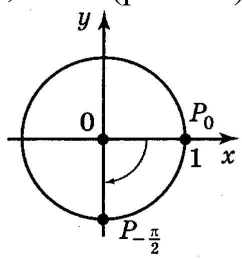

Рис. 86

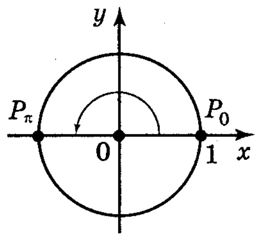

Рис. 87

10. Ординату, рівну 1, має точка (0; 1) одиничного кола (рис. 84). Цю точку отримаємо із точки (1; 0) поворотом на кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Отже, sin *x* = 1, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Абсцису, рівну 1, має точка (рис. 85), утворена із точки (1; 0) поворотом на кути $2\pi n,\ n \in Z$. Отже, cos *x* = 1, якщо $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

12. Ординату, рівну -1, має точка (рис. 86), утворена із точки (1; 0) поворотом на кут $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$ Отже, sin *x* = -1, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. Абсцису, рівну -1, має точка, утворена із точки P_α поворотом (рис. 87) на кут $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$. Отже, cos *x* = -1, якщо $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

II. Застосування властивостей тригонометричних функцій до розв'язування вправ.

Виконання вправ

1. Використовуючи властивості функції *y* = sin *x*, порівняйте числа:

а) $\sin\frac{13\pi}{7}$ і $\sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ і $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; в) sin 3 і sin 4; г) sin 1° і sin 1.

Відповідь: а) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

в) sin 3 > sin 4; г) sin 1° < sin 1.

2. Розташуйте числа в порядку зростання:

а) sin 20°; sin 85°; sin 30°; б) sin 0,2; sin 0,3; sin 0,1; в) sin 2; sin (-2); sin (-1); sin 1.

Відповідь: а) sin 20°; sin 30°; sin 85°;

б) sin 0,1; sin 0,2; sin 0,3; в) sin (-2); sin (-1); sin 1; sin 2.

3. Використовуючи властивості функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

а) cos 2,52 і cos 2,53; б) cos (-4,1) і cos (-4); в) cos 1 і cos 3; г) cos 4 і cos 5.

Відповідь: а) cos 2,52 > cos 2,53; б) cos (-4,1) > cos (-4);

в) cos 1 > cos 3; г) cos 4 < cos 5.

4. Розташуйте числа в порядку зростання:

а) cos 13°; cos 53°; cos 23°; б) cos 0,3; cos 0,6; cos 0,9; в) cos 2; cos 4; cos 6.

Відповідь: а) *cos* 53°; cos 23°; cos 13°; б) cos 0,9; cos 0,6; cos 0,3;

в) cos 4; cos 2; cos 6.

5. Використовуючи властивості функції $y = \mathrm{tg}\, x$, порівняйте числа:

а) tg (-2,6π) і tg (-2,61π); б) tg 2,7π і tg 2,75π; в) tg 2 і tg 3; г) tg 1 і tg 1,5.

Відповідь: а) tg (-2,6π) > tg (-2,61π); б) tg 2,7π < .tg 2,75π;

в) tg 2 < tg 3; г) tg 1 < tg 1,5.

6. Розташуйте числа в порядку зростання:

а) tg 25°; tg 65°; tg 15°; б) tg (-1); tg (-2); tg (-3); в) tg (-5); tg (-3); tg 3.

Відповідь: а) tg 15°; tg 25°; tg 65°; б) tg (-1); tg (-3); tg (-2);

в) tg 3; tg (-3); tg (-5).

III. Побудова графіка функції $y = \sin x$.

Для побудови графіка функції $y = \sin x$ скористаємось одиничним колом. Побудуємо одиничне коло радіусом 1 см (2 клітинки). Праворуч побудуємо систему координат, як на рис. 57.

На вісь ОХ нанесемо точки $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π (відповідно 3 клітинки, 6 клітинок, 9 клітинок, 12 клітинок). Розділимо першу чверть одиничного кола на три рівні частини і на стільки ж частин відрізок $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ осі абсцис. Перенесемо значення синуса до відповідних точок осі ОХ. Одержимо точки, які треба з'єднати плавною лінією. Потім розділимо другу, третю і четверту чверть одиничного кола також на три рівні частини і перенесемо значення синуса до відповідної точки осі ОХ. Послідовно з'єднавши всі отримані точки, одержимо графік функції $y = \sin x$ на проміжку [0;π].

Рис. 57

Через те що функція $y = \sin x$ періодична з періодом 2π, то для побудови графіка функції $y = \sin x$ на всій прямій *OX* досить паралельно перенести побудований графік вздовж осі *OX* на 2π, 4π, 6π... одиниць вліво і вправо (рис. 58).

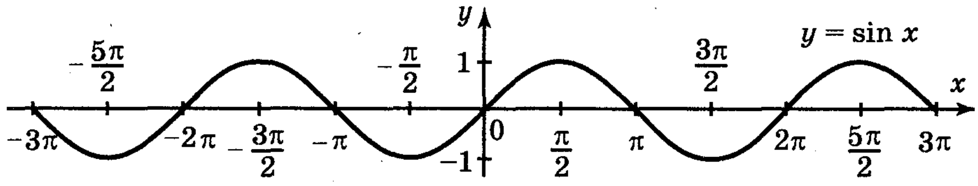

Рис. 58

Крива, яка є графіком функції $y = \sin x$, називається синусоїдою.

Виконання вправ

1. Побудуйте графіки функцій.

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = 2\sin x$; г) $y = \sin(-x)$.

Відповіді: а) рис. 59; б) рис. 60; в) рис. 61; г) рис. 62.

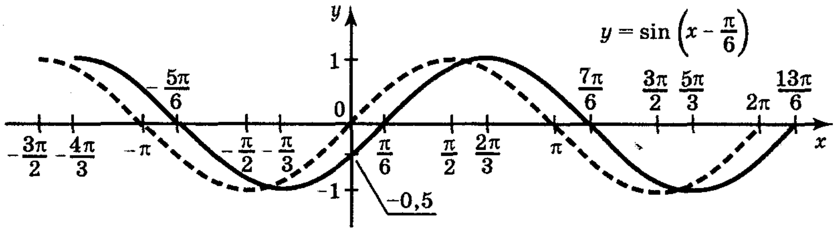

Рис. 59

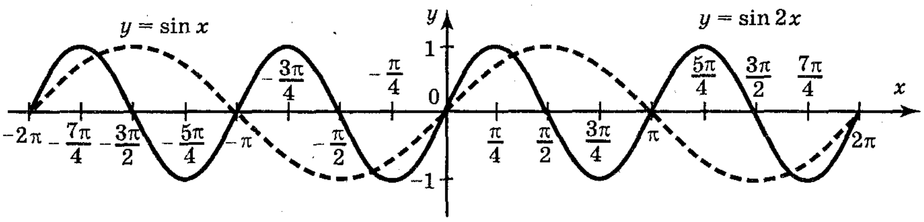

Рис. 60

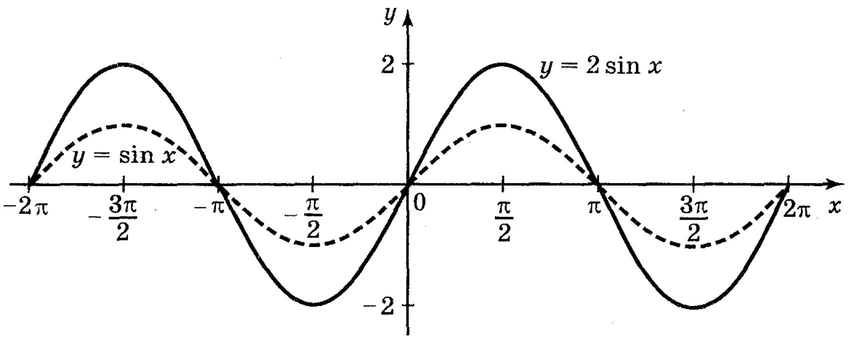

Рис. 61

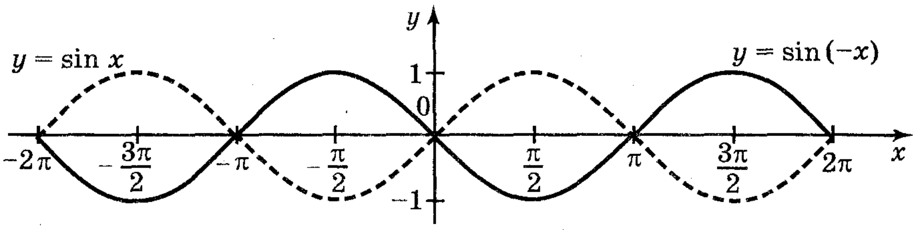

Рис. 62

IV. Побудова графіка функції $y = \cos x$.

Як відомо, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, тому $y = \cos x$ і $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ — однакові функції. Для побудови графіка функції $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ скористаємося геометричними перетвореннями графіків: спочатку побудуємо (рис. 63) графік функції $y = \sin x$, потім $y = \sin(-x)$ і наприкінці $y = \sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)$.

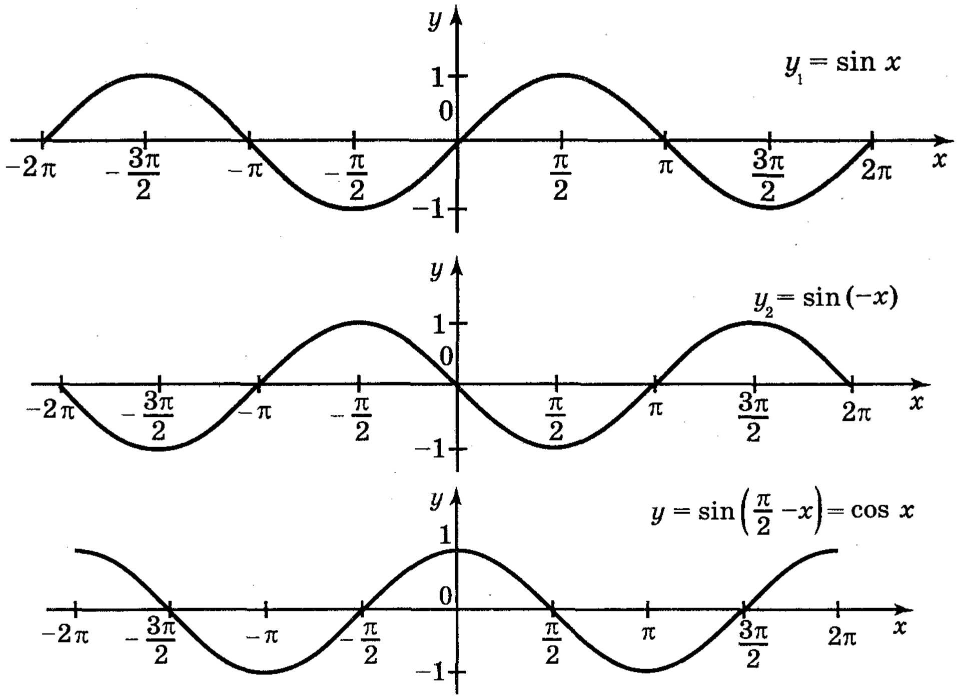

Рис. 63

<u>Виконання вправ</u>

1. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\frac{\pi}{2}$; в) $y = \frac{1}{2}\cos x$; г) $y = |\cos x|$.

Відповідь: а) рис. 64; б) рис. 65; в) рис. 66; г) рис. 67.

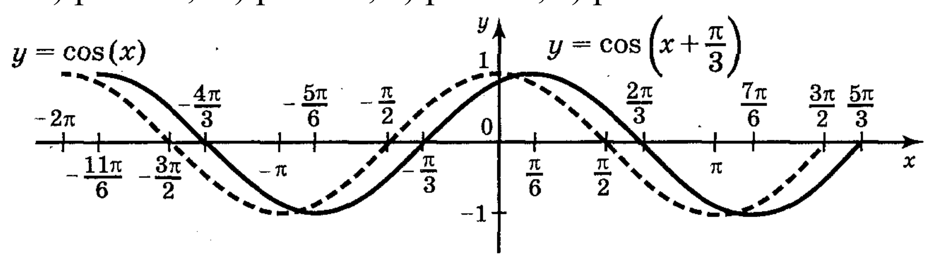

Рис. 64

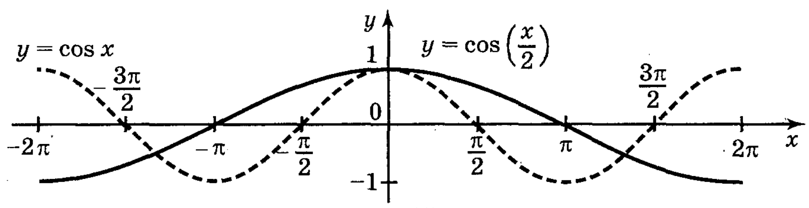

Рис. 65

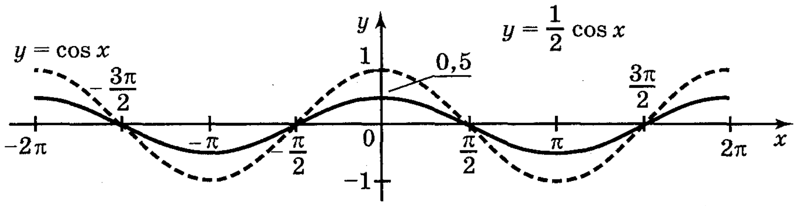

Рис. 66

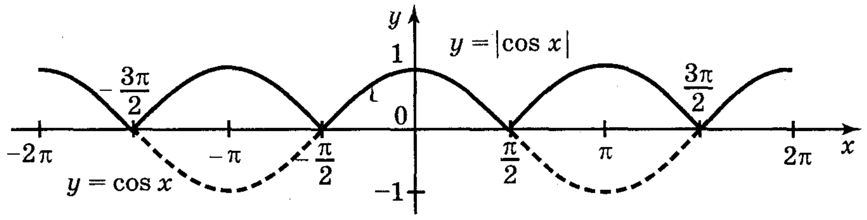

Рис. 67

V. Побудова графіка функції *y* = tg *x*.

Графік функції $y = tg\ x$ побудуємо за допомогою лінії тангенсів на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, довжина якого дорівнює періоду π цієї функції. Побудуємо одиничне коло радіусом 2 см (4 клітинки) і проведемо лінію тангенсів. Праворуч побудуємо систему координат, як на рис. 68.

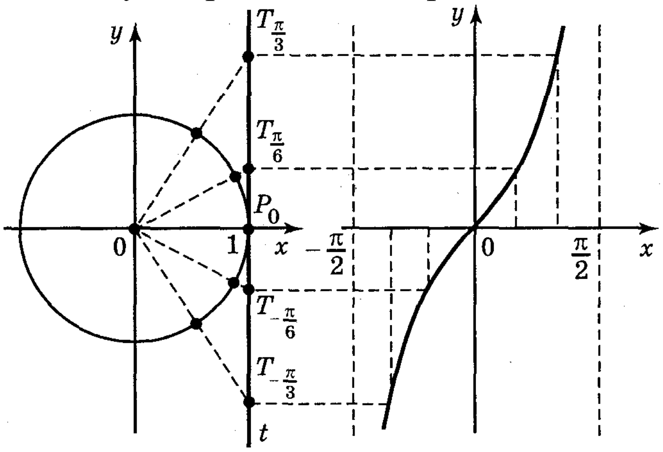

Рис. 68

На вісь ОХ нанесемо точки $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ (6 клітинок). Розділимо першу і четверту чверть кола на 3 рівні частини і на стільки ж частин кожний із відрізків $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. Знайдемо значення тангенсів чисел $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$ за допомогою лінії тангенсів (ординати точок $T_{-\frac{\pi}{3}}$; $T_{-\frac{\pi}{6}}$; T_0; $T_{\frac{\pi}{6}}$; $T_{\frac{\pi}{3}}$ лінії тангенсів). Перенесемо значення тангенсів до відповідних точок осі *OX*. Послідовно з'єднавши всі отримані точки, одержимо графік функції y = tg x на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Через те що функція $y = tg\ x$ періодична з періодом π, для побудови графіка функції $y = tg\ x$ на всій прямій OX досить паралельно перенести побудований графік вздовж осі *OX* на π, 2π, 3π, 4π... одиниць вліво і вправо (рис. 69).

Графік функції $y = tg\ x$ називається тангенсоїдою.

Виконання вправ

1. Побудуйте графік функцій

а) $y = tg\ 2x$; б) $y = tgx;$ в) $y = tg\ x + 2$; г) $y = tg\ (-x)$.

Відповіді: а) рис. 70; б) рис. 71; в) рис. 72; г) рис. 73.

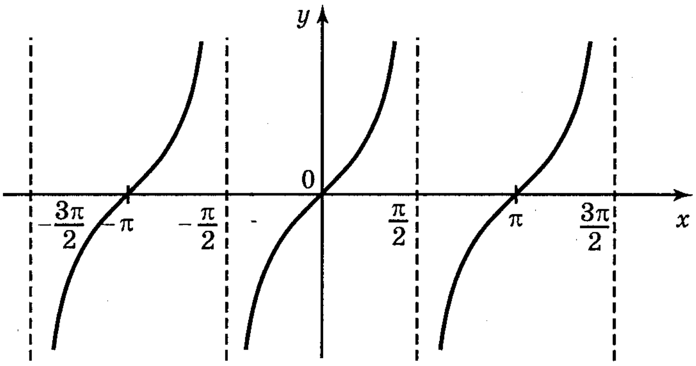

Рис. 69

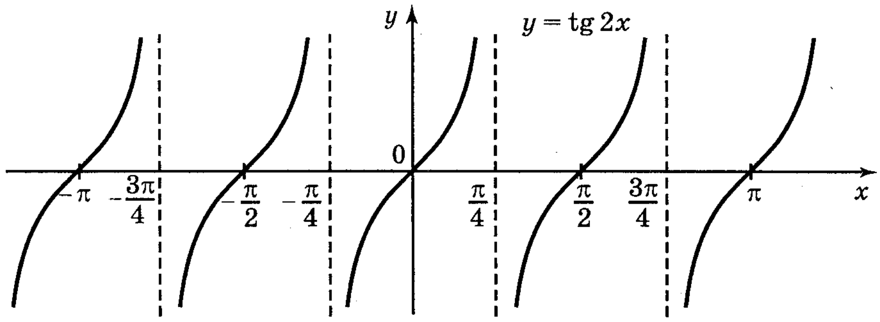

Рис. 70

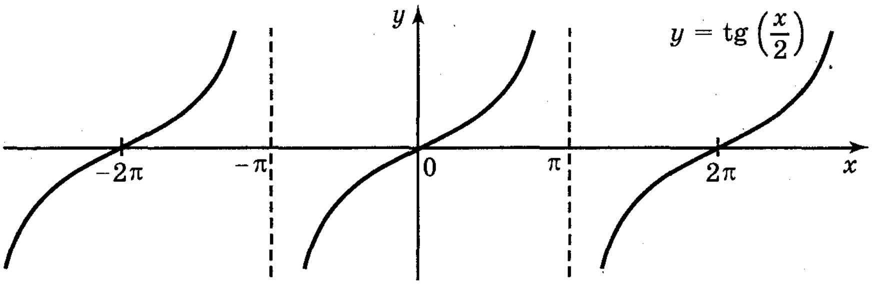

Рис. 71

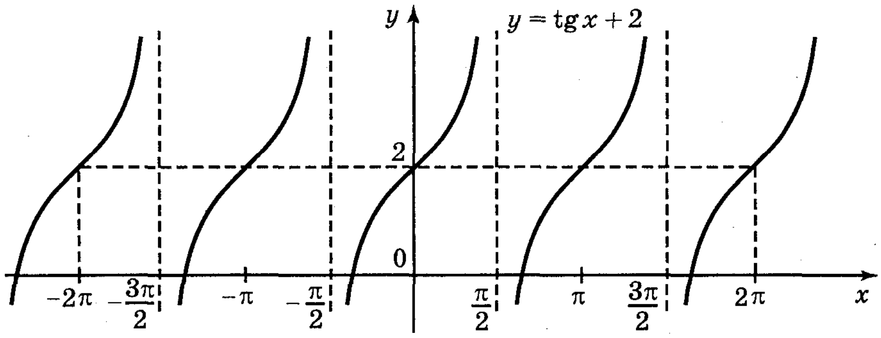

Рис. 72

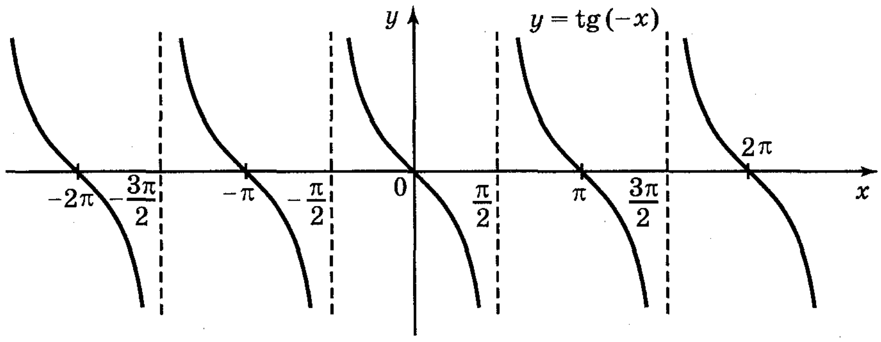

Рис. 73

VI. Побудова графіка функції *y = ctg x.*

Графік функції y = ctg x легко одержати, скориставшись формулою ctg x = tg $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ і двома геометричними перетвореннями (рис. 74): симетрія відносно осі OY паралельне перенесення вздовж осі OX на $-\frac{\pi}{2}$.

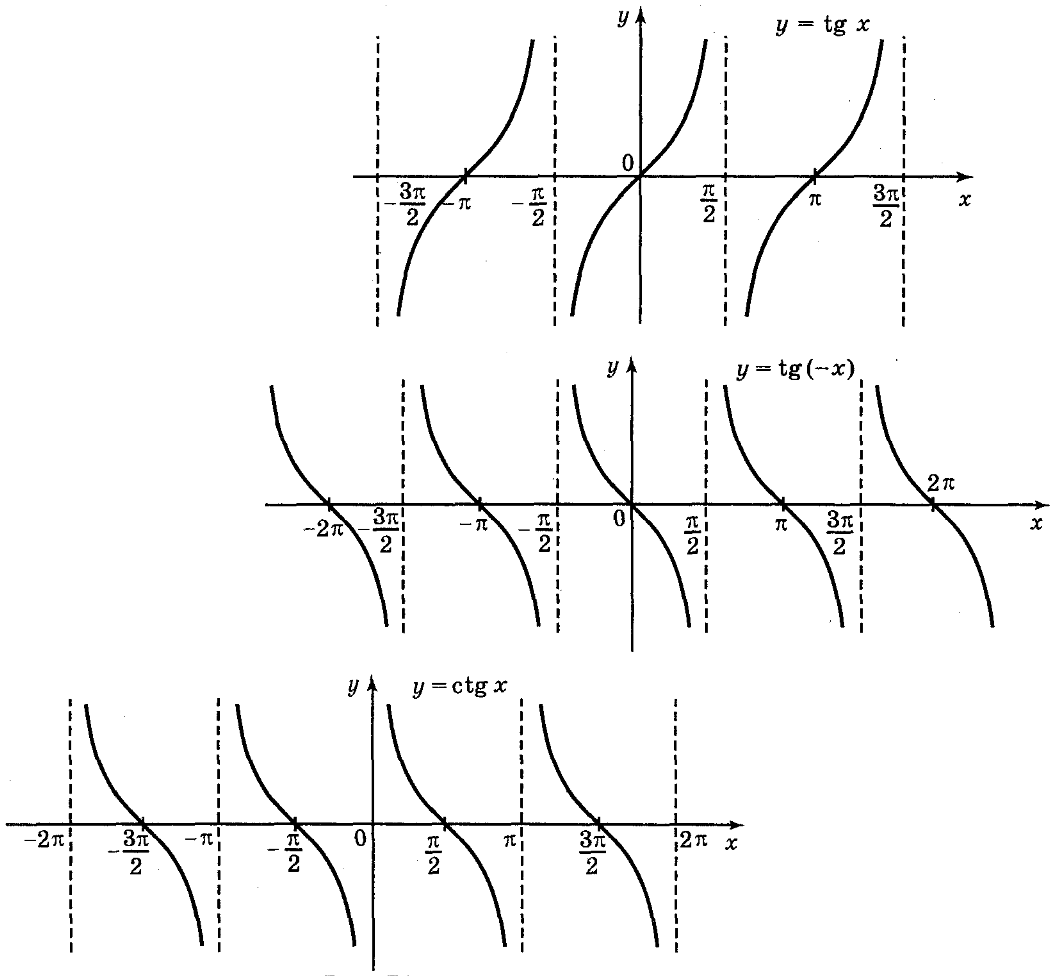

Рис. 74

Домашнє завдання.

[2 Бевз Г.П., Бевз В.Г.] Розділ 2,§10, ст.78-85.

[1 Істер. О. С.] Розділ 2,§12,п.2-8. ст.110-117.

Таблиця 1

№ п/п	Властивості	Функція			
		$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{ctg}\, x$
1	2	3	4	5	6
1.	$D(y)$	R	R	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$x \neq \pi n$, $n \in Z$
2.	$E(y)$	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	R	R
3.	Парність	непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	непарна $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$	непарна $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$
4.	Періодичність, період	2π	2π	π	π
5.	Нулі функції	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$
6.	Якщо $x = 0$	$\sin x = 0$	$\cos x = 1$	$\mathrm{tg}\, x = 0$	не визначено
1	2	3	4	5	6
7.	Проміжки, на яких $y > 0$	$(2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
8.	Проміжки, на яких $y < 0$	$(-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$
9.	Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	немає
10.	Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$	немає	$(\pi n;\ \pi + \pi n)$
11.	Найменші значення	$y = -1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$y = -1$, якщо $x = \pi + 2\pi n$	немає	немає
12.	Найбільші значення	$y = 1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$y = 1$, якщо $x = 2\pi n$	немає	немає