ЛЕКЦІЯ № 3

Тема: Формули зведення. Періодичність функцій.

І. Сприймання і усвідомлення формул зведення.

Тригонометричні функції чисел виду $\frac{\pi}{2}$ ± α, π ± α; $\frac{3\pi}{2}$ ± α, 2π ± α можуть бути виражені через функції кута α за допомогою формул, які називаються формулами зведення.

Користуючись формулами тригонометричних функцій суми (різниці) двох чисел, можна довести формули зведення:

для синуса

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

для косинуса

$$cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

для тангенса і котангенса

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha,\quad tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha,$$
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha,\quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha.$$

Формули зведення запам'ятовувати необов'язково. Для того щоб записати будь-яку з них, можна користуватися таким правилом:

1) В правій частині формули ставиться той знак, який має ліва частина при умові 0 < α < $\frac{\pi}{2}$.
2) Якщо в лівій частині формули кут дорівнює $\frac{\pi}{2}$ ± α, $\frac{3\pi}{2}$ ± α, то синус замінюється на косинус, тангенс — на котангенс і навпаки. Якщо кут дорівнює π ± α, то заміна не виконується.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Виразимо tg(π – α) через тригонометричну функцію кута α. Якщо вважати, що α — кут І чверті, то π – α буде кутом ІІ чверті. У ІІ чверті тангенс від'ємний, отже, у правій частині рівності слід поставити знак «мінус». Для кута π – α назва функції «тангенс» зберігається. Тому.

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha.$$

За допомогою формул зведення знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого числа можна звести до знаходження значень тригонометричних функцій чисел від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Знайдемо значення $\sin\frac{8\pi}{3}$.

Маємо: $\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>Виконання вправ</u>

1. Приведіть до тригонометричних функцій числа а:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; в) ctg (π – α); г) tg (π + α); д) sin (π + α); є) $tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Відповідь: а) cos α; б) - sin α; в) - *ctg*α; г) tg α; д) - sin α; є) *ctg* α.

2. Знайдіть:

а) $\sin\frac{2\pi}{3}$; б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$; г) $\sin\frac{5\pi}{6}$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{2}$.

3. Спростіть:

а) $\dfrac{ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - tg(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)}$; б) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + ctg(\pi - \alpha)}{tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

Відповідь: а) 1. б) –1.

4. Доведіть, що

а) $\dfrac{tg(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = tg^2\alpha$, б) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)}{tg(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} = \sin\alpha$.

ІІ. Формування поняття періодичної функції, період функції.

У природі часто зустрічаються явища, які повторюються періодично. Наприклад, Земля при обертанні навколо Сонця періодично повертається У своє початкове положення через рік, два роки, три роки і т. д., тому говорять, що період обертання Земля навколо Сонця дорівнює одному року. Періодичний характер мають рухи маховика і колінчатого вала. Властивість періодичності мають звукові, електромагнітні явища, робота серця людина і т. д. Закономірності періодичних явищ описуються періодичними функціями, до вивчення яких ми і приступаємо.

Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x із області визначення числа $x + T$ і $x - T$ також належать області визначення і виконується рівність $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Так як одній і тій самій точці P_α одиночного кола відповідає нескінченна множина дійсних чисел $\alpha + 2\pi k$, де $k \in Z$, то

$$\sin(\alpha + 2nk) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2nk) = \cos\alpha$$

Звідси випливає, що $2nk$ – періоди функції синус і косинус $(k \neq 0)$.

Доведемо, що число 2π є найменшим додатним періодом функції $y = \cos x$. Нехай $T > 0$ – період косинуса, тобто для будь-якого x виконується нерівність $\cos(x + T) = \cos x$. Взявши $x = 0$, одержимо $\cos T = 1$. Звідси $T = 2nk$, $k \in Z$. Через те що $T > 0$, T може дорівнювати 2π, 4π, 6π... і тому період не може бути меншим 2π.

Можна довести, що найменший період функції $y = \sin x$ теж дорівнює 2π. Нехай T — довільний період синуса. Тоді $\sin(x + T) = \sin x$ для будь-якого x. Взявши $x = \frac{\pi}{2}$, одержимо $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, але $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, якщо $T + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, тому $T = 2\pi n$. Найменше додатне число виду $2\pi n$, $n \in Z$ є число 2π.

Доведемо, що найменшим додатним періодом функції $y = tg\,x$ є число π. Нехай T — додатний період тангенса, тобто $tg(x + T) = tg\,x$. Взявши $x = 0$, маємо $tg\,T = tg\,0 = 0$. Звідси $T = \pi n$, $n \in Z$. Через те що найменше ціле додатне $n = 1$, π — найменший період функції $y = tg\,x$. Найменшим додатним періодом котангенса теж є число π. Отже, $tg(\alpha + \pi n) = tg\,\alpha$, $ctg(\alpha + \pi n) = ctg\,\alpha$.

Як правило, слова “найменший додатний період” опускають. Прийнято говорити, що період тангенса і котангенса дорівнює π, а період косинуса і синуса дорівнює 2π.

Справедливе твердження.

Якщо функція $y = f(x)$ періодична і має період T, то функція $y = Af(kx + b)$, де A, k, b — постійні $(k \neq 0)$, також періодична, причому її період дорівнює $\frac{T}{|k|}$

Доведемо це твердження.

Спочатку доведемо, що $T_0 = \frac{T}{|k|}$ є періодом функції $y = Af(kx + b)$:

$$Af(k(x + T_0) + b) = Af\left(k\left(x + \frac{T}{|k|}\right) + b\right) = Af(kx \pm T + b) = Af(kx + b \pm T) = Af(kx + b).$$

Нехай T_0 — період функції $y == Af(kx + b)$, тобто

$$Af(k(x + T_0) + b) = Af(kx + b),$$
$$Af(kx + b + kT_0) = Af(kx + b).$$

Позначивши $kx + b = x_1$, маємо $Af(x + kT_0) = Af(x_1)$.

Через те що найменшим періодом функції $f(x)$ є T, то $|k| T_0 = T$, звідси $T_0 = \frac{T}{|k|}$.

III. Усвідомлення поняття періодичної функції.

Виконання вправ

1. Обчисліть: а) sin 1470°; б) tg 1860°; в) cos 1140°; г) ctg 1125°.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

2. Знайдіть значення: а) $\sin\frac{33\pi}{4}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; в) $\mathrm{tg}\frac{31\pi}{6}$; г)$\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 1.

3. Знайдіть найменший додатний період функцій:

а) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; б) $y = 3\cos 4x$; в) $y = 5\mathrm{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y=0,6ctg\left(\frac{1}{4}x + 2\right)$.

Відповідь: а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) 4π.

4. Знайдіть значення sin α, якщо:

а) sin (α + 2π) = 0,3; б) sin (4π - α) = 0,2; в) sin (α + 6π) = 0,5; г) sin (α - 2π) = 0,1.

Відповідь: а) 0,3; б) -0,2; в) 0,5; г) 0,1.

Домашнє завдання.

[2 Бевз Г.П., Бевз В.Г.] Розділ 2,§9, ст.71-77.

[1 Істер. О. С.] Розділ 2,§11, ст.102-108.§12,п.1. ст.109-110.