ЛЕКЦІЯ №2

Тема: Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

I. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

***1**. Співвідношення між синусом і косинусом.*

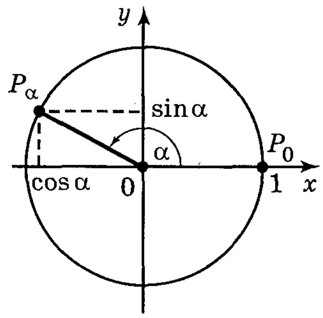

Рис. 100

Нехай точка $P_\alpha(x, y)$ одиничного кола отримана поворотом точки $P_0(1; 0)$ на кут α радіан, тоді згідно з означенням синуса і косинуса: $x = \cos\alpha$, $y == \sin\alpha$ (рис. 100)

Оскільки точка $P_\alpha(x;y)$ належить одиничному колу, то координати $(x; y)$ задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = 1$. Підставивши в це рівняння замість x і y значення cos α і sin α , отримаємо:

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ або (враховуючи, що $(\cos\alpha)^2 = cos^2\alpha$, $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$)) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Таким чином, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = l$ для всіх значень α. Ця рівність називається основною тригонометричною тотожністю.

З основної тригонометричної тотожності можна виразити sin α через cos α і навпаки. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Виконання вправ

1. Чи можуть бути справедливими одночасно рівності:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ і $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ і $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ і $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

при одному і тому самому значенні α?

Відповідь: а) ні; б) так; в) так.

2. Знайдіть cos α, якщо sin α = 0,6 і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Відповідь: cos α = -0,8.

3. Знайдіть sin α, якщо $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Відповідь: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

4. Спростіть вирази:

а) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; б) $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; в) $2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1$;

г) $(1 - \cos\alpha)(l + \cos\alpha)$; д) $\frac{1-cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; є) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 1$.

Відповідь: а) 2; б) 0; в) $\sin^2\alpha$; г) $\sin^2\alpha$; д) $tg^2\alpha$; є) $2\sin^2\alpha$.

5. Доведіть тотожності:

а) $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$;   б) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

в) $(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

г) $2\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1$;   д) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha$;

є) $\dfrac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2tg^2\alpha$.

6. Знайдіть $\cos \alpha$, якщо $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \dfrac{1}{8}$.

Відповідь: $\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$.

<u>**2.** *Співвідношення між тангенсом і котангенсом. Згідно з визначенням тангенса і котангенса*</u>

$$tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Перемноживши ці рівності, одержимо

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

Отже, $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ для всіх значень α, крім $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, k, k \in Z$. із одержаної рівності можна виразити tg α через ctg α і навпаки: $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}$; $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$.

Виконання вправ

1. Чи можуть бути справедливими одночасно рівності:

а) $tg\ \alpha = \dfrac{2}{5}$ і $ctg\alpha = \dfrac{5}{2}$; б) $tg\alpha = \dfrac{2}{5}$ і $ctg\alpha = \dfrac{1}{2}$; в) $tg\ \alpha = -\dfrac{1}{2}$ і $ctg\ \alpha = 2$

при одному і тому самому значенні α?

Відповідь: а) так; б) ні; в) ні.

2. Знайдіть

а) tg α, якщо $ctg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) ctg α, якщо tg α = -1; в) tg α, якщо ctg α = 0.

Відповідь: а) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; б) -1; в) не існує.

3. Дано: $x = 2tg\ \alpha$, $y = ctg\ \alpha$. Знайдіть xy.

Відповідь: $xy = \dfrac{1}{4}$.

4. Дано $tg\ \alpha + ctg\ \alpha = 2$. Знайдіть $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$.

Відповідь: 2.

5. Спростіть:

а) $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha - 1$; б) $\sin^2 \alpha - tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha$; в) $tg\ 1° \cdot tg\ 3° \cdot tg\ 5° \cdot ... \cdot tg\ 89°$.

Відповідь: а) 0; б) $-\cos \alpha$; в) 1.

6. Доведіть тотожності:

а) $(tg\ \alpha + ctg\ \alpha)^2 - (tg\ \alpha - ctg\ \alpha)^2 = 4$; б) $\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta} = tg\alpha tg\beta$;

в) $\frac{tg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha + tg\beta} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$; г) $\frac{tg\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{ctg\alpha} = \cos\alpha$;

є) $4 + (\text{ctg}\ \alpha - \text{tg}\ \alpha)^2 = (\text{ctg}\ \alpha + \text{tg}\ \alpha)^2$.

3. Співвідношення між тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом.

Розділимо ліву і праву частину рівності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$, вважаючи, що $\cos^2\alpha \neq 0$, одержимо:

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

звідси: $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, де $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Розділимо ліву і праву частину рівності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\sin^2\alpha$, вважаючи, що $\sin\alpha \neq 0$, одержимо

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \qquad \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

звідси: $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, де $\alpha \neq \pi k, k \in Z$.

Виконання вправ

1. Чи можуть бути справедливими одночасно рівності.

а) $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $ctg\ \alpha = 1$ і $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3}$ і $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

при одному і тому ж значенні α?

Відповідь: а) ні; б) так; в) ні.

2. Відомо, що tg α = 2 і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть sin α, cos α і ctg α.

Відповідь: $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\text{ctg}\ \alpha = \frac{1}{2}$.

3. Відомо, що $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть cos α, tg α, ctg α.

Відповідь: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$; $\text{ctg}\ \alpha = 1\frac{1}{3}$.

4. Відомо, що ctg α = -3 і α — кут IV чверті. Знайдіть sin α, cos α, tg α.

Відповідь: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\text{tg}\ \alpha = -\frac{1}{3}$.

5. Відомо, що $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ і α — кут I чверті. Знайдіть sin α, tg α, ctg α.

Відповідь: $\sin\alpha = \frac{15}{17}$; $\text{tg}\ \alpha = 1\frac{7}{8}$; $\text{ctg}\ \alpha = \frac{8}{15}$.

6. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \sin^2\alpha$; б) $\frac{1}{1 + ctg^2\alpha} - \sin^2\alpha$; в) $(1 + tg^2\alpha)\cos^2\alpha - 1$;

г) $1 - \sin^2\alpha(1 + ctg^2\alpha)$; д) $(1 + tg^2\alpha) + \frac{1}{\sin^2\alpha}$; є) $\frac{1 + tg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$.

Відповідь: а) 1; б) 0; в) 0; г) 0; д) $\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$; є) tg α.

7. Доведіть тотожності:

а) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=1$; б) $(1 - ctg\,\alpha)^2 + (1 + ctg\,\alpha)^2 = \frac{2}{\sin^2\alpha}$;

в) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\frac{1+tg\alpha+tg^2\alpha}{1+ctg\alpha+ctg^2\alpha}=tg^2\alpha$.

Домашнє завдання.

[2 Бевз Г.П., Бевз В.Г.] Розділ 2,§8, ст.66-71.

[1 Істер. О. С.] Розділ 2,§10, ст.94-101.