ЛЕКЦІЯ №1

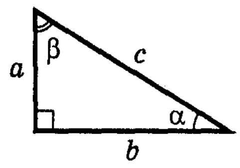
Тема: Синус, косинус, тангенс, кута. Радіанне вимірювання кутів. Тригонометричні функції числового аргументу.

I. Повторення відомостей про тригонометричні функції гострих кутів прямокутного трикутника.

Провести повторення шляхом фронтальної бесіди з використанням таблиці 1.

Таблиця 1

Тригонометричні функції гострих кутів прямокутного трикутника



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

1. Дайте означення синуса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Дайте означення косинуса гострого кута прямокутного трикутника.
3. Дайте означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника. (Увести поняття котангенса гострого кута прямокутного трикутника).
4. Користуючись рис. 31, знайдіть sin α, cos α, tg α, *ctg α,* sin β, cos β, tg β, ctg β.

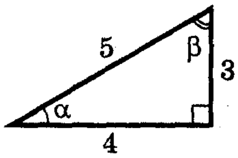


Рис. 31

Значення тригонометричних функцій

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0
ctg α	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує

Тригонометричні тотожності

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

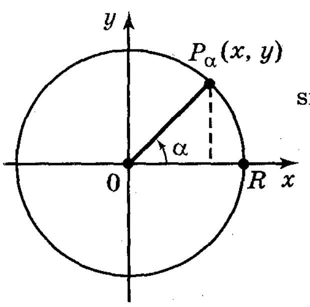
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$



Тригонометричні функції довільного кута

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \cos\alpha = \frac{x}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

5. Обчисліть:

а) $2\cos 60° + \sqrt{3}\cos 30°$; б) $3tg45°\cdot tg60°$;

в) $2\cos 30° + 6\cos 60° – 4\,tg\,45°$; г) $2\,ctg\,60° – 2\sin 60°$.

6. Спростіть:

а) $(1 – \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; б) $tg\alpha – ctg\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

II. Повторення відомостей про тригонометричні функції довільного кута.

У курсі геометрії для кутів від 0° до 180° було дано означення синуса, косинуса, тангенса за допомогою кола. Нагадаємо ці означення. Нехай дано коло радіуса *R,* центр якого знаходиться у початку координат. Відкладемо від додатної півосі у верхню півплощину кут α, друга сторона якого перетне коло в точці $P_\alpha(x; y)$ (рис. 32).

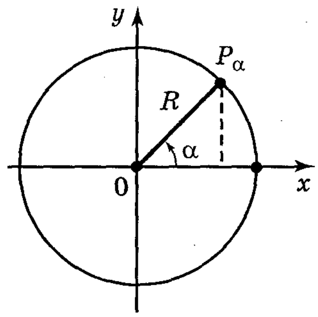


Рис. 32

Синусом кута називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\sin\alpha = \frac{y}{R}$.

Косинусом кута називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\cos\alpha = \frac{x}{R}$.

Тангенсом кута називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ до її абсциси: $tg\alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом кута називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ до її ординати: $ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

Приклад 1. Знайти sin α, cos α, tg α, ctg α, якщо α = 120°. Побудувавши точку $P_{120°}$, маємо (рис. 33):

$$\sin 120^\circ = \frac{PA}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = \frac{OA}{OP} = \frac{-\frac{1}{2}R}{R} = -\frac{1}{2};$$

$$tg120^\circ = \frac{AP}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{-\frac{1}{2}R} = -\sqrt{3}; \quad ctg120^\circ = \frac{OP}{AP} = \frac{-\frac{1}{2}R}{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

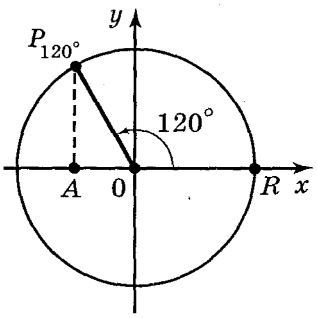


Рис. 33

Якщо будь-який кут розглядати як фігуру, утворену обертанням променя навколо своєї початкової точки у двох можливих напрямах (додатному — проти годинникової стрілки, від'ємному — за годинниковою стрілкою), то дане визначення можна використовувати для будь-яких кутів.

Приклад 2. Знайти sin α, cos α, tg α, ctg α, якщо α = 270°. При повороті на 270° навколо точки *O* радіус OA, який дорівнює *R,* перейде в радіус *OP,* тоді (рис. 34)

$P_{270°}(0; -R)$ і, отже, $\sin 270° = \frac{-R}{R} = -1$, $\cos 270° = \frac{0}{R} = 0$,

$ctg270° = \frac{0}{-1} = 0$, tg 270° не має змісту.

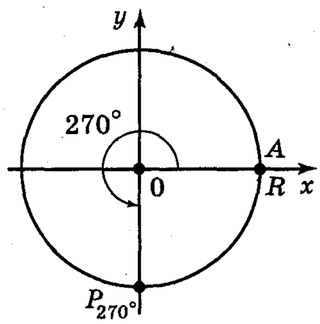


Рис. 34

Із курсу геометрії відомо, що величина кута в градусах виражається числом від 0° до 180". Кут Повороту може виражатися в градусах, яким завгодно дійсним числом від $-\infty$ до $+\infty$.

Приклад 3. Якщо початковий радіус OA зробив повний оберт проти годинникової стрілки, то кут повороту буде дорівнювати 360° (рис. 35). Якщо початковий радіус OA зробив півтора оберти проти годинникової стрілки, то кут повороту буде дорівнювати 540° (рис. 36). Якщо початковий радіус OA зробив два повних оберти і чверть оберту за годинниковою стрілкою, то кут повороту буде дорівнювати 2 (-360°) - 90° = - 810° (рис. 37).

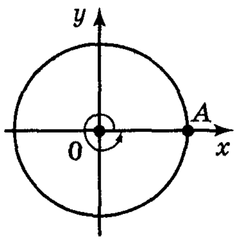


Рис. 35

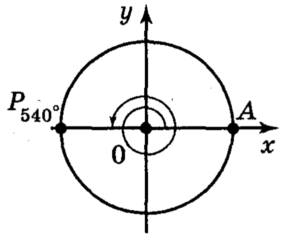


Рис. 36

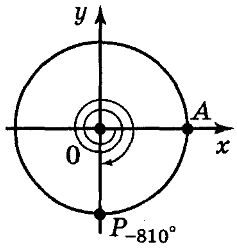


Рис. 37

Розглянемо радіуси *OA* і *OB*. Існує безліч кутів повороту, при яких початковий радіус *OA* переходить у радіус *OB* (рис. 38). Нехай <*AOB* = α, тоді відповідні кути повороту будуть дорівнювати α + 360°*n*, де *n* — ціле число *(n* $\in$ Z).

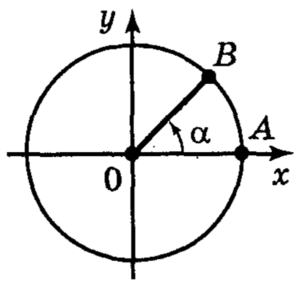


Рис. 38

Якщо початковий радіус переходить у радіус *OB* при повороті на кут a, то в залежності від того, у якій четверті буде радіус 0B, кут α називають кутом цієї чверті. Так, якщо 0° < α < 90°, то α – кут I чверті; якщо 90° < α < 180°, то α — кут II чверті; якщо 180° < α < 270°, то α — кут III чверті; якщо 270° < α < 360°, то α — кут IV чверті. Кути 0°; ±90°; ±180°; ±270°; ±360° не відносяться ні до якої чверті.

У курсі геометрії було доведено, що значення синуса, косинуса і тангенса кута α, де 0° < α < 180° залежить тільки від α і не залежить від довжини *R*. І в загальному вигляді sin α, cos α, tg α, а також ctg α залежать тільки від кута α.

Вирази sin α і cos α, визначені для будь-яких a, так само як для будь-якого кута повороту, можна знайти відношенням $\frac{y}{R}$ і $\frac{x}{R}$.

Вираз tg α має смисл при будь-яких a, крім кутів повороту ±90°; ±270°; ±450°, тобто $\alpha \neq 90°+180°\,n$, *(n* $\in$ Z).

Вираз ctg α має смисл при будь-яких a, крім кутів повороту 0°; ±180°; ±360°.., тобто, $\alpha \neq 180°\,n$, *(n* $\in$ Z).

Кожному допустимому значенню α відповідає єдине значення sin α, cos α, tg α, ctg α, тому синус, косинус, тангенс, котангенс є функціями кута α. Їх називають *тригонометричними функціями.*

<u>Виконання вправ</u>

1. Чому дорівнюють кути повороту, які показано на рисунку 39.

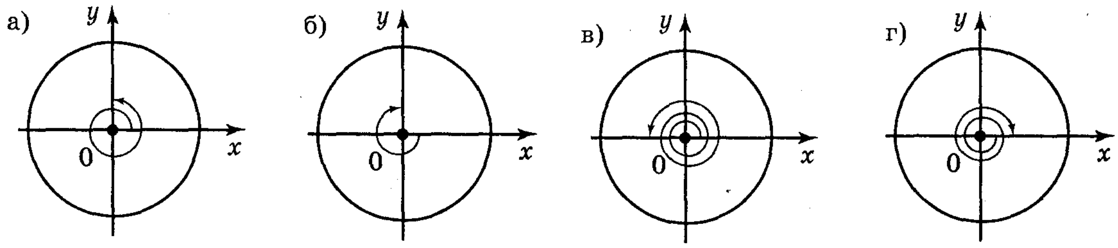


Рис. 39

2. Накресліть коло із центром у початку координат і побудуйте кут повороту, що дорівнює: а) 135°; б) -120°; в) 540°; г) -810°.

3. Запишіть всі кути поворотів, при яких радіус *OA* переходить у радіус *OB* (рис. 40).

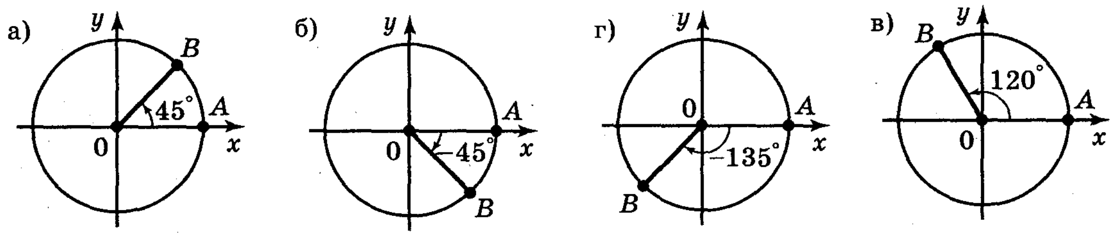


Рис. 40

4. Побудуйте коло з центром у початку координат і кути повороту, що дорівнюють:
   а) $90° + 360°\,n$, $(n \in Z)$; б) $180° + 360°\,n$, $(n \in Z)$;
   в) $-90° + 180°\,n$, $(n \in Z)$; г) $\pm 60° + 360°\,n$, $(n \in Z)$.
5. Визначте, кутом якої чверті є кут α, якщо кут а дорівнює:
   а) 181°; б) 179°; в) 271°; г) 361°; д) 345°; є) 800°.
6. Серед кутів повороту 790°; 500°; -30°; 1580°; -220°; -290° знайдіть такі, при яких початковий радіус займе таке саме положення, як і при повороті на кут: а) α = 70°; 6) α = 140°.
7. Накресліть коло з центром на початку координат і радіусом *R* = 5 см. Поверніть початковий радіус на кут α і знайдіть наближене значення sin α, cos α, tg α, ctg α, якщо α = 50°; 175°; -100°.

III.Радіанна міра кутів і дуг.

Як відомо, кути вимірюються в градусах, хвилинах, секундах,

Градусом називається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута.

Таким чином, розгорнутий кут дорівнює 180°, прямий кут дорівнює 90°.

Між градусами, хвилинами і секундами існують співвідношення: $1^{o} = 60'$, $1' = 60''$, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{I}$. Крім градусної міри, використовуються і інші одиниці вимірювання кутів. У математиці і фізиці це радіанна міра кута.

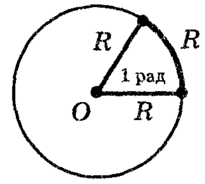


Рис. 41

1 радіан — центральний кут, який опирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу (рис. 41).

Установимо зв'язок між радіанним і градусним вимірюванням кутів. Куту, що дорівнює 180°, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR (рис. 42). Щоб знайти радіанну міру кута в 180°, треба довжину дуги π-R розділити на довжину радіуса *R:* $\frac{\pi R}{R} = \pi$. Отже, радіанна міра кута в 180° дорівнює π:

180° = π рад

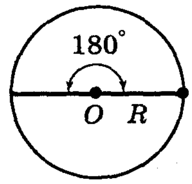


Рис. 42

Із цієї формули одержуємо (розділивши ліву і праву частини рівності на 180):

$1° = \frac{\pi}{180^\circ}$ рад, або $1° \approx 0{,}017$ рад.

Із рівності 180° = π рад також одержуємо (розділивши ліву і праву частини рівності на π):

1 рад = $\frac{180^\circ}{\pi}$, або 1 рад $\approx$ 57°.

Розглянемо приклади переходу від радіанної міри до градусної і навпаки.

Приклад 1. Виразіть в радіанах величини кутів 30°; 45°; 60°; 90°.

Розділивши ліву і праву частини рівності: 180° = π рад послідовно на 6, 4, 3, 2, одержуємо: 30° = $\frac{\pi}{6}$ рад, 45° = $\frac{\pi}{4}$ рад, 60° = $\frac{\pi}{3}$ рад; 90° = $\frac{\pi}{2}$ рад.

Приклад 2. Виразіть в градусах величини кутів $\frac{\pi}{10}$ рад, $\frac{\pi}{5}$ рад, $\frac{\pi}{12}$ рад, $\frac{\pi}{18}$ рад.

Розділивши ліву і праву частини рівності: 180° = π рад послідовно на 10; 5; 12; 18, одержуємо: $\frac{\pi}{10}$ рад = 18º; $\frac{\pi}{5}$ рад = 36º; $\frac{\pi}{12}$ рад = 15º; $\frac{\pi}{18}$ рад = 10º.

Приклад 3. Знайдіть в градусах 3,5 рад.

Через те що 1 рад = $\frac{180^\circ}{\pi}$, 3,5 рад = $3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{630^\circ}{\pi}$ = 201° .

Приклад 4. Знайдіть радіанну міру кута в 72°.

Через те що $1° = \frac{\pi}{180^\circ}$ рад, $72° = 72 \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ рад = $\frac{2\pi}{5}$ рад $\approx$ 1,3 рад.

При записі радіанної міри кута позначення «рад» опускають. Наприклад, замість рівності 90° = $\frac{\pi}{2}$ рад, пишуть 90° = $\frac{\pi}{2}$.

Радіанна міра кута зручна для обчислення довжини дуги кола. Через те що кут в 1 радіан стягує дугу, довжина якої дорівнює *R*, то кут в α радіан стягує дугу довжиною: $l = \alpha R$.

Якщо радіус кола дорівнює одиниці, то $l = \alpha$, тобто довжина дуги дорівнює величині центрального кута, що опирається на цю дугу в радіанах.

Виконання вправ

1. Запишіть у радіанній мірі кути: а) 120°; б) 300°; в) -405°; г) -22,5°.

Відповідь: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; в) $-2\frac{1}{4}\pi$; г) $-\frac{\pi}{8}$.

2. Подайте в градусній мірі кути: а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $2{,}5\pi$; в) $0{,}3\pi$; г) $\frac{11\pi}{3}$.

Відповідь: а) 135°; б) 450°; в) 54°; г) 660°.

3. Подайте в радіанній мірі кути (скористуйтеся таблицями або калькулятором):

а) 20° 12'; б) 54° 23'; в) 136° 27'; г) 127° 15'.

Відповідь: а) 0,3586; б)0,9492; в) 2,3815; г) 2,221.

4. Подайте в градусній мірі кути (скористайтеся таблицями або калькулятором):

а) 15; б) 2; в) 1,1417; г) 4,3982.

Відповідь: а) 859,87°; б) 114,65°; в) 65° 25'; г) 252°.

IV. Сприймання і усвідомлення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа.

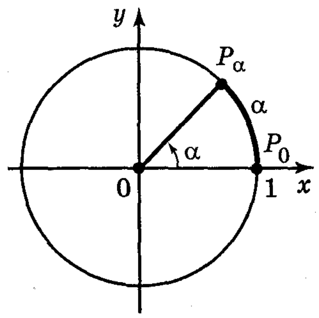


Рис. 43

Розглянемо на координатній площині коло радіуса 1 з центром у початку координат, яке називається одиничним (рис. 43). Позначимо точку P_o — правий кінець горизонтального діаметра. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу α точку кола за такими правилом:

1) Якщо $\alpha > 0$, то, рухаючись по колу із точки P_o в напрямі проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу кола), опишемо по колу шлях довжиною а, кінцева точка цього шляху і буде шуканою точкою P_α.

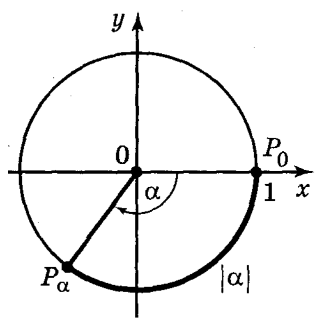


Рис. 44

2) Якщо $\alpha < 0$, то, рухаючись із точки P_o (рис. 44) в напрямі за годинниковою стрілкою, опишемо по колу шлях довжиною $|\alpha|$; кінець цього шляху і буде шукана точка P_α.

3) Якщо $\alpha = 0$, то поставимо у відповідність точку P_o.

Таким чином, кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку P_0 одиничного кола.

Якщо $\alpha = \alpha_o + 2\pi k$, де k — ціле число, то при повороті на кут α одержуємо одну і ту саму точку, що й при повороті на кут α_o.

Якщо точка P відповідає числу α, то вона відповідає і всім числам виду $\alpha + 2\pi k$, де 2π — довжина кола (бо радіус дорівнює 1), а k — ціле число, що показує кількість повних обходів кола в ту чи іншу сторону.

Виконання вправ

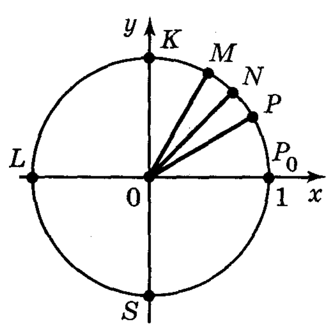


Рис. 45

1. Яким числам відповідають точки P_0, P, M, K, L, S (рис. 45), якщо відомо, що N — середина дуги P_0K, а дуги P_0P, PM, MK — рівні.

Відповідь: $2\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pi+2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$.

2. Позначте на одиночному колі точки, які відповідають числам:

а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, де $n \in Z$.

Відповідь: а) рис. 46 (кожна чверть кола поділена на 2 рівні частини);

б) рис. 47 (кожна чверть кола поділена на 3 рівні частини).

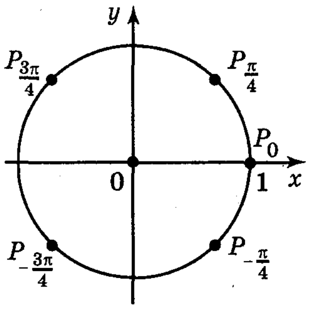


Рис. 46

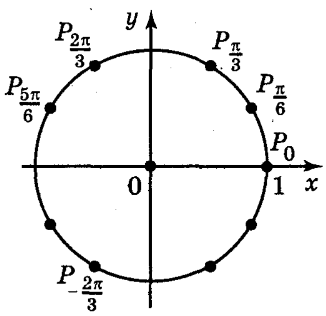


Рис. 47

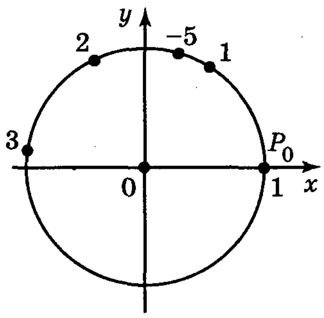


Рис. 48

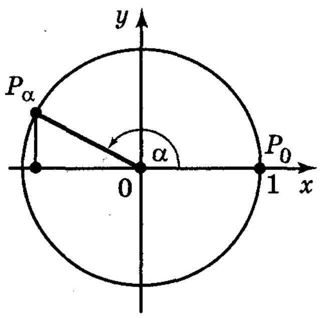


Рис. 49

3. Позначте на одиночному колі точки, які відповідають числам 1; 2; 3;-5. *Відповідь:* рис. 48.

Синусом числа α називається ордината точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається sin α) (рис. 49).

Синус визначений для будь-якого числа α.

Косинусом числа α називається абсциса точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається cos α) (рис. 49).

Косинус визначений для будь-якого числа α.

Виконання вправ

1. Обчисліть: а) cos 7π; б) sin 7π; в) $\cos\frac{5\pi}{2}$; г) $\sin\frac{5\pi}{2}$.

Відповідь: а) -1; б) 0; в) 0; г) 1.

2. Обчисліть:

а) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; в) sin π + sin 1,5π; г) cos0 + cos 3,5π - cos 3π.

Відповідь: а) 0; б) -1; в) -1; г) 2.

Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до його косинуса: $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тангенс визначений для всіх а, крім тих значень, для яких cos α = 0, тобто, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

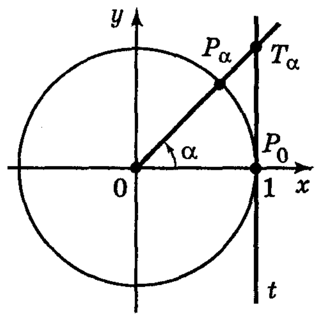


Рис. 50

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінію тангенсів (рис. 50). Проведемо дотичну *t* до одиничного кола в точці P_o. Нехай α — довільне число, для якого cos α ≠ 0, тоді точка P_α (cos α; sin α) не лежить на осі ординат і пряма OP_α перетинає *t* в деякій точці T_α з абсцисою 1. Знайдемо ординату точки T_α із трикутника OP_oT_α.

$\dfrac{y}{1} = tg\alpha$; $y = \text{tg}\alpha$.

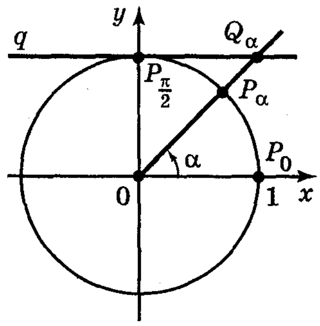


Рис. 51

Таким чином, ордината точки перетину прямих OP_α і *t* дорівнює тангенсу числа α. Тому пряму *t* називають віссю тангенсів.

! Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до його синуса: $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Котангенс визначений для всіх α, крім таких значень, для яких sin α ≠ 0, тобто, a = π *n*, *n* ∈ *Z.*

Введемо поняття лінії котангенсів (рис. 51). Проведемо дотичну *q* до одиничного кола в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$. Для довільного числа α, якщо sin α ≠ 0 і відповідно точка P_α (cos α, sin α) не лежить на осі *OX* і тому пряма OP_α перетинає пряму *q* у деякій точці Q_α з ординатою, що дорівнює 1. Із трикутника $OP_{\frac{\pi}{2}}Q_\alpha$ маємо: $\dfrac{x}{1} = ctg\alpha$, звідси *x* = ctg α. Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_α і *q* дорівнює котангенсу числа α, тому пряму *q* називають віссю котангенсів.

Виконання вправ

1. Обчисліть: а) tg π; б) tg (-π); в) tg 4π; г) tg $\dfrac{3\pi}{2}$.

Відповідь: а) 0; б) 0; в) 0; г) не визначений.

2. Визначте знак числа: а) tg $\dfrac{3\pi}{4}$; б) tg $\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$; в) tg $\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$; г) ctg $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

V. Визначення значень тригонометричних функцій деяких чисел.

Через те що поворот на кут в α радіан співпадає з поворотом 180 на кут — $\dfrac{180}{\pi}$ α градусів, аргумент синуса і косинуса можна виразити як в градусах, так і в радіанах. Наприклад, при повороті точки (1; 0) на кут $\dfrac{\pi}{2}$, тобто на кут 90°, тому

$\sin\frac{\pi}{2}$ = sin 90° = 1, $\cos\frac{\pi}{2}$ = cos 90° = O .

Заповнити таблицю значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса

Таблиця 4

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існ.	0	не існ.	0
ctg α	не існ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існ.	0	не існ.

Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса інших чисел можна знайти за допомогою математичних таблиць або калькулятора.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $3\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\,\frac{\pi}{3}$; б) $5\sin\frac{\pi}{4} + 3\text{tg}\,\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{\pi}{4} - 10\text{ctg}\,\frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2tg\frac{\pi}{6} - tg\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$; г) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \text{tg}\,\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}$; б)-7; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{4}$.

2. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) sin 1,5; б) cos 0,5; в) $\text{tg}\,\frac{27\pi}{3}$; г) $\text{ctg}\,\frac{\pi}{9}$.

Відповідь: а) 1,00; б) 0,88; в) 3,08; г) 2,75.

IV. Вивчення зміни знаків тригонометричних функцій.

Число sin α — це ордината відповідної точки P_α, тому sin α > O, якщо точка розташована вище осі абсцис, тобто в I і II чвертях (рис. 52). Якщо ця точка лежить нижче осі абсцис, то її ордината від'ємна в третій і четвертій чвертях. Число cos α — це абсциса точки P_α, тому cos α > 0 в I та IV чвертях, cos α < 0 в II та III чвертях (рис. 53).

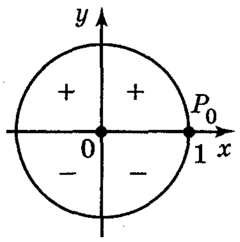


Рис. 52

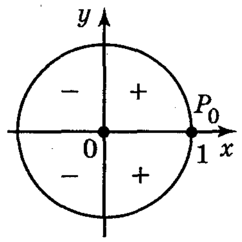


Рис. 53

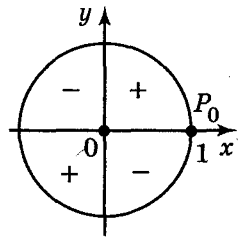


Рис. 54

Так як $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то tg α > 0 і ctg α > 0, якщо sin α і cos α мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, і tg α < 0 і ctg α < 0 в II і IV чвертях (рис. 54).

Виконання вправ

1. У якій чверті знаходиться точка P_α , якщо:

а) sin α > 0 і cos α > 0; б) sin α > 0 і cos α < 0;
в) sin α < 0 і cos α > 0; г) sin α < 0 і cos α < О?

Відповідь: а) I; б) II; в) IV; г) III.

2. Якій чверті належить P_α, якщо:

а) sin α cos α > 0; б) sin α cos α < 0;
в) tg α cos α > 0; г) ctg α sin α < 0?

Відповідь: а) I або III; б) II або IV; в) I або II; г) II або III.

3. Знайдіть знак виразу:

а) cos $\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) sin $\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) ctg (π + α); г) tg $\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, якщо 0 < α < $\dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) плюс; г) плюс.

4. Визначте знак виразу:

а) sin105° – cos105°; б) cos155° – sin255°; в) tg127° · ctg200°; г) tg351° · ctg220°.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

5. Визначте знак добутку:

а) tg 2 · tg 3 · ctg 3 · cos 1; б) sin 1 · cos 2 · tg 3 · ctg 4.

Відповідь: а) мінус; б) плюс

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ 2,§7, §8, ст.68-80.