

ЛЕКЦІЯ № 1

Тема заняття. Тіла і поверхні обертання. Циліндр. Перерізи циліндра.

Мета заняття: формування понять циліндр, основи і твірні циліндра; радіус, висота та вісь циліндра; осьовий переріз циліндра; вивчення властивостей основ і твірних циліндра; формування вмінь студентів знаходити елементи циліндра.

Обладнання: моделі циліндрів, конусів.

I. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1. Тіла та поверхні обертання

Уявимо, що плоский багатокутник $ABCD$ обертається навколо прямої AB (рис. 99, а). При цьому кожна його точка, що не належить прямій AB , описує коло з центром на цій прямій. Весь багатокутник $ABCD$, обертаючись навколо прямої AB , описує деяке тіло обертання (рис. 99, б). Поверхня цього тіла називається поверхнею обертання. Пряму AB називають віссю обертання цього тіла.

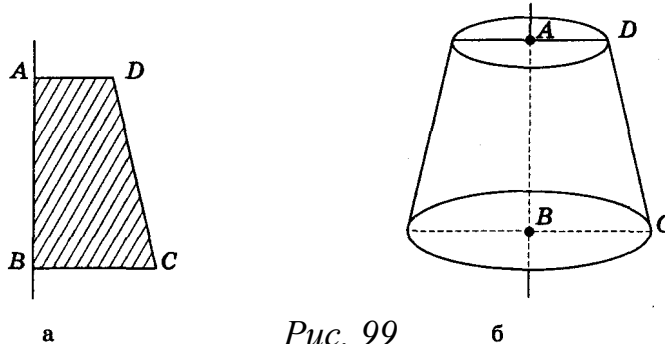


Рис. 99

Будь-яка площина, що проходить через вісь тіла обертання, перетинає це тіло. Утворений переріз називають **осьовим перерізом тіла обертання**.

У житті ми дуже часто зустрічаємося з тілами обертання. Це — звичайна пляшка, пробірка, колба, хокейна шайба, патрон, котушка тощо. Більшість деталей, виготовлених на токарному верстаті, має форму тіл обертання.

2. Циліндр

Пояснення нового матеріалу можна провести так, як це зроблено в п. 52 § 6 підручника.

Наведемо інший варіант пояснення.

Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.

На рис. 100 зображено циліндр, утворений обертанням плоского прямокутника $OABO_1$ навколо прямої OO_1 — осі циліндра.

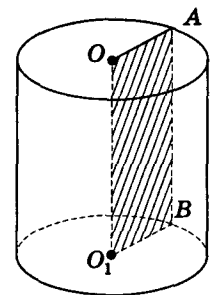


Рис. 100

Сторони OA і O_1B описують рівні кола, які лежать у паралельних площинах і називаються **основами циліндра**. Радіуси кругів називаються **радіусами циліндра**. Сторона AB описує поверхню, яка називається **бічною поверхнею** циліндра. Відрізки бічної поверхні, які паралельні і дорівнюють AB , називаються **твірними циліндра**.

Висотою циліндра називається відрізок, перпендикулярний до основ циліндра, кінці якого належать основам. Висота циліндра дорівнює його

твірній.

3. ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА

Осьовий переріз циліндра — прямокутник зі сторонами, що дорівнюють висоті циліндра і діаметру його основи (рис. 101).

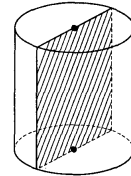


Рис. 101

Теорема

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник (рис. 109).

Доведення

Дійсно, січна площина перетинає бічну поверхню циліндра по твірних AB і CD , які рівні і паралельні, крім того, $AB \perp AD$, $CD \perp AD$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

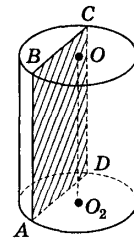


Рис. 109

Теорема

Переріз циліндра площиною, паралельною основам циліндра, є круг, який дорівнює основі (рис. 110).

Доведення

Дійсно, січна площина перетинає циліндр по колу, бо, якщо виконати паралельне перенесення уздовж осі циліндра, яке суміщає січну площину з площиною основи циліндра, то переріз суміститься з кругом

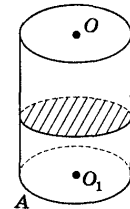


Рис. 110

Розв'язування задач

1. Висота циліндра 6 см, радіус основи 5 см. Знайдіть периметр перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.
(Відповідь. 24 см.)
2. Висота циліндра дорівнює 10 см. Площа перерізу циліндра площиною, паралельною осі циліндра і віддаленою на 9 см від неї, дорівнює 240 см^2 . Знайдіть радіус циліндра. (Відповідь. 15 см.)
3. У циліндрі проведено паралельно осі площину, яка відтинає від кола основи хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 120° . Висота циліндра дорівнює 10 см. Знайдіть площу перерізу, якщо січна площина віддалена від осі на 2 см. (Відповідь. $40\sqrt{3} \text{ см}^2$.)

Розв'язування задач

1. Наведіть приклади побутових предметів, які мають форму циліндра.
2. Користуючись рис. 100, назвіть: а) радіус циліндра; б) висоту циліндра; в) вісь циліндра; г) твірну циліндра.
3. Які властивості мають основи циліндра?
4. Які властивості мають твірні циліндра?
5. Яку властивість має вісь циліндра щодо: а) його основ; б) його твірних?
6. Часто висотою прямого кругового циліндра називають відрізок,

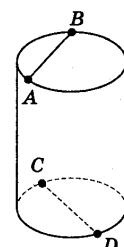


Рис. 102

що з'єднує центри основ. Яку властивість має висота циліндра щодо: а) твірних; б) основ?

- Із стопки картону взяли аркуш і вирізали круг. Дістали циліндр з дуже малою висотою. Як практично визначити його висоту?
- Кусок тонкого дроту можна вважати циліндром, у якого радіус дуже малий. Як практично визначити цей радіус?
- Назвіть властивості циліндра, які однакові з властивостями прямої призми.
- Як знайти відстань між прямими АВ і CD (рис. 102)?
- Де відрізок АВ перетинає площину перерізу $KLMN$ циліндра (рис. 103)?
- Циліндр розміщений на площині α (рис. 104). На цій самій площині взято точку С. Де пряма ВС вдруге перетне поверхню циліндра?
- Довжина відрізка, кінці якого знаходяться на колах основ циліндра і який перетинає вісь, дорівнює 13 см. Знайдіть радіус циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см. (Відповідь. 6 см.)
- Довжина відрізка, що з'єднує дві точки кіл основ циліндра і перетинає вісь, дорівнює 10 см. Знайдіть висоту циліндра, якщо його радіус дорівнює 3 см. (Відповідь. 8 см.)
- Радіус циліндра дорівнює R . Знайдіть: а) площу основи циліндра; б) довжину кола основи циліндра. (Відповідь, а) πR^2 ; б) $2\pi R$.)
- Площа основи циліндра дорівнює Q . Знайдіть радіус циліндра.

(Відповідь. $\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.)

- Знайдіть радіус циліндра, якщо довжина кола основи циліндра дорівнює C .

(Відповідь. $\frac{C}{2\pi}$.)

- З квадрата, площа якого Q , згорнули бічну поверхню циліндра. Знайдіть площу основи циліндра. (Відповідь. $\frac{Q}{4\pi}$.)

Знаходження елементів циліндра

Розв'язування задач

- Радіус основи циліндра дорівнює R , висота — H . Знайдіть діагональ осьового перерізу та площу осьового перерізу. (Відповідь. $\sqrt{4R^2 + H^2}$; $2RH$.)
- Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює a і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу осьового перерізу та площу основи.

(Відповідь. $\frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha$; $\frac{1}{4} \pi a^2 \cos^2 \alpha$.)

- Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, якщо площа основи дорівнює Q , а площа осьового перерізу в n разів більша площі основи.

(Відповідь. $\frac{\sqrt{16Q + n^2 \pi^2 Q}}{2\sqrt{\pi}}$.)

- Радіус циліндра дорівнює R , висота — H . Знайдіть

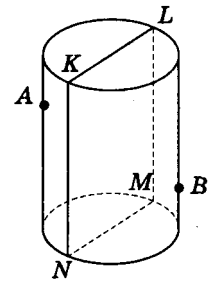


Рис. 103

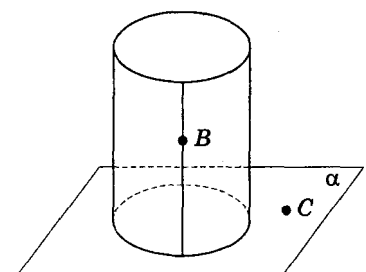


Рис. 104

кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

(Відповідь. $\arctg \frac{H}{2R}$.)

5. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу. (Відповідь. 90° .)

Прямим круговим конусом називається тіло, утворене обертанням плоского прямокутного трикутника навколо одного із його катетів (рис. 124).

II. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи.

- 1) Що таке прямий круговий циліндр (твірна, основи, бічна поверхня, радіус, вісь, осьовий переріз)?
- 2) Заповніть пропуски:
 - а) основи циліндра лежать у ... площинах і ...;
 - б) твірні циліндра ... і ...;
 - в) поверхня циліндра складається із ... і ...;
 - г) прямий круговий циліндр — це тіло, яке описує прямокутник при обертанні його навколо ... як осі;
 - д) радіус циліндра — це радіус ...;
 - е) висотою циліндра називається відстань між...