ЛЕКЦІЯ №5

Тема заняття: Логарифмічні рівняння та нерівності.

Мета заняття: Формування умінь студентів розв'язувати логарифмічні рівняння та нерівності.

І. Засвоєння поняття найпростіших логарифмічних рівнянь та методів їх розв'язування.

Логарифмічними рівняннями називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$lg\,x = 1 + lg^2 x$, $log_3(x + 3) = 9$, $\sqrt{\lg x} = \lg\sqrt{x}$ і т. д.

Розв'язати логарифмічне рівняння — це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд $log\ x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. За означенням логарифма випливає, що $x = a^b$.

Інший вигляд найпростішого логарифмічного рівняння такий:

$log_a x = log_a b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $b > 0$.

Із цього рівняння випливає, що $x = b$. Дійсно із рівності $log_a x = log_a b$ на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо:

$$x = a^{\log_a b} = b.$$

Найпростішим логарифмічним рівнянням є рівняння $log_x a = b$, де $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$.

За означенням логарифма маємо: $x^b = a$, звідси $x = a^{\frac{1}{b}}$.

В основному, всі логарифмічні рівняння, які ми будемо розв'язувати, зводяться до розв'язування найпростіших рівнянь.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $log_3(2x + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо:

$2x + 1 = 3^2$, $2x = 8$, $x = 4$.

Перевірка: $log_3(2 \cdot 4 + 1) = log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $log_3 x = log_3(6 - x^2)$.

Розв'язання

Із рівності логарифмів чисел випливає: $x = 6 - x^2$; $x^2 + x - 6 = 0$;

$x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Число -3 не є коренем даного рівняння, бо вираз $log_3(-3)$ — не визначений;
2) $log_3 x = log_3 2$; $log_3(6 - x^2) = \log_3(6 - 2^2) = log_3 2$.

Відповідь: 2.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання

За означенням логарифма маємо:

$2x^2 + 1 = (x + 1)^2$; $2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 2x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1) Значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x + 1$ не повинна дорівнювати 1.

2) $\log_{x+1}(2\cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 2.

Відзначимо, що в описаних прикладах використовуються тільки такі перетворення, які не приводять до втрати коренів, але можуть привести до одержання сторонніх коренів. Тому перевірка кожного із одержаних коренів обов'язкова, якщо немає впевненості в рівносильності рівнянь.

Колективне розв'язування вправ № 53 (1; 3; 9), 54 (1), 52 (6; 13).

II. Сприймання і усвідомлення розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей.

Як відомо, логарифмічна функція $y = log_a\, x$ зростає при $a > 1$, спадає — при $0 < a < 1$. Із зростання функції $y = log_a\, x$ у першому випадку і спадання — у другому випадку випливає:

1) При $a > 1$ нерівність $log_a x_2 > log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 > x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

2) При $0 < a < 1$ нерівність $log_a x_2 > log_a x_1$ рівносильна системі $\begin{cases} x_2 < x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $log_2 x < 3$.

Рис. 166

Розв'язання

Оскільки $3 = log_2 2^3 = log_2 8$, то запишемо дану нерівність у вигляді $log_2 x < log_2 8$. Оскільки функція $y = log_2 x$ зростаюча при $x > 0$, то маємо: $\begin{cases} x < 8, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $0 < x < 8$ (рис. 166).

Відповідь: $x \in (0; 8)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$.

Рис. 167

Розв'язання

Запишемо дану нерівність у вигляді:

$\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9$. Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ спадна при x

> 0, маємо: $\begin{cases} x \ge 9, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $x \ge 9$ (рис. 167).

Відповідь: $x \in [9; +\infty)$.

Як правило, логарифмічна нерівність зводиться до нерівностей виду: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, де $a > 0$, $a \ne 1$.

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність: loggg($x^2 + x$) > -1.

Розв'язання

Так як $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$, то $\log_{0,5}(x^2 + x) > \log_{0,5} 2$.

Одержана нерівність рівносильна системі

$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 2 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1) > 0, \\ (x+2)(x-1) \le 0. \end{cases}$

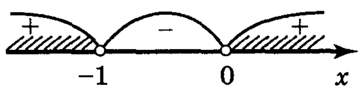

Рис. 168

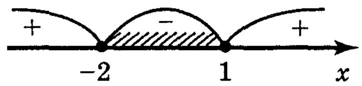

Рис. 169

Рис. 170

Розв'язком першої нерівності (рис. 168) є $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Розв'язком другої нерівності (рис. 169) є [-2; 1]. Тоді маємо (рис. 170) $x \in [-2; -1) \cup (0; 1]$.

Відповідь: $[-2; -1) \cup (0; 1]$.

III. Сприймання і усвідомлення розв'язування логарифмічних нерівностей (які розв'язуються введенням нової змінної).

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\log_5^2 x - \log_5 x > 2$.

Розв'язання

Нехай $\log_5 x = y$, тоді отримаємо нерівність $y^2 - y - 2 > 0$.

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів (рис. 171): $y \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

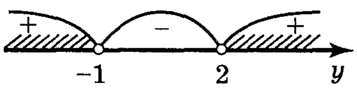

Рис. 171

Враховуючи заміну матимемо:

1) $\log_5 x < -1$; $\log_5 x < \log_5 \frac{1}{5}$; $\begin{cases} x < \frac{1}{5}, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in \left(0; \frac{1}{5}\right)$;

2) $\log_5 x > 2$; $\log_5 x > \log_5 25$; $\begin{cases} x > 25, \\ x > 0; \end{cases}$ $x \in (25; +\infty)$. Отже, $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$ – розв'язок даної нерівності.

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup (25; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\frac{2}{1+\lg x} \geq 1$.

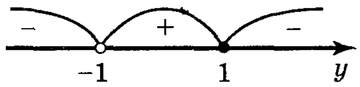

Рис. 172

Розв'язання

Нехай $lg\ x = y$, тоді матимемо нерівність

$$\frac{2}{1+y} \geq 1;\ y \neq 1;\quad \frac{2}{1+y} - 1 \geq 0;\ \frac{2-1-y}{1+y} \geq 0;\ \frac{1-y}{1+y} \geq 0.$$

Рис. 173

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів (рис. 172): $y \in (-1;1]$.

Враховуючи заміну, отримаємо $-1 < lg\ x \leq 1$.

Тоді $\begin{cases} \lg x \leq 1, \\ \lg x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg x \leq \lg 10, \\ \lg x > \lg 0{,}1; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 10, \\ x > 0{,}1 \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $x \in (0{,}1;\ 10]$ (рис. 173).

Відповідь: (0,1; 10].

IV. Сприймання і усвідомлення розв'язування логарифмічних (комбінованих) нерівностей методом інтервалів.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $(3x - 6)log_{0,5}x > 0$.

Розв'язання

Нехай $y = (3x - 6)\ log_{0,5}\ x,\ \ y > 0$.

Область визначення функції y: $x > 0$.

Знайдемо нулі функції: $(3x - 6) \cdot log_{0,5}x = 0$;

$3x - 6 = 0,\ log_{0,5}\ x = 0$;

$x = 2,\ x = 1$.

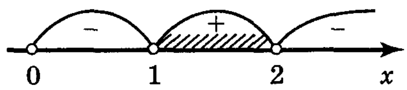

Рис. 174

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точками 2 і 1 і знайдемо знаки функції на утворених проміжках (рис. 174). Отже, $x \in (1;\ 2)$.

Відповідь: (1; 2).

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $log_{\ x\text{-}3}(x - 1) < 2$.

Розв'язання

Нехай $y = log_{\ x\text{-}3}(x - 1) - 2$ і $y < 0$. Область визначення функції знаходимо із системи: $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x > 3, \\ x \neq 4; \end{cases}$ $x \in (3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Знайдемо нулі функції: $log_{\ x\text{-}3}(x - 1) = 2$; $x - 1 = (x - 3)^2$; $x - 1 = x^2 - 6x + 9$; $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x = 5$, $x = 2$. $x = 2$ — не входить в область визначення функції. Перевіркою переконуємося, що $x = 5$ — нуль функції.

Розіб'ємо область визначення функції на проміжки точкою 5 та знайдемо знаки функції на утворених проміжках (рис. 175).

Отже, $x \in (3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$.

Відповідь: $(3;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$.

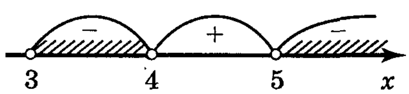

Рис. 175

V. Сприймання і усвідомлення графічного способу розв'язування логарифмічних нерівностей.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $log_3\ x < 4 - x$ графічно.

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = log_3 x$ і $y = 4 - x$ в одній системі координат. Графіки перетинаються в точці А з абсцисою $x = 3$ (рис. 176).

Із рисунка видно, що множина розв'язків нерівності $log_3 x < 4 - x$ є проміжок (0; 3].

Відповідь: (0; 3].

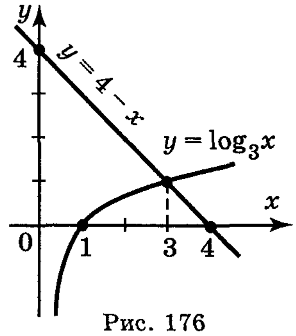

Рис. 176