

ЛЕКЦІЯ № 2.

Тема заняття: Показникові рівняння, нерівності.

Мета заняття: Формування умінь студентів розв'язувати показникові рівняння способом зведення до спільної основи; способом винесення за дужки спільного множника; способом зведення до спільного показника; графічним способом. Познакомити студентів зі способами розв'язування показникових нерівностей.

I. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

Показниковими називаються рівняння, у яких невідоме міститься в показнику степеня при постійних основах.

Наприклад. Рівняння $2^x + 3 = 0$; $3^{x+1} - 3^x - 1 = 0$ є показниковими.

Найпростішим показниковим рівнянням є рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки множина значень функції $y = a^x$ — множина додатних чисел, то рівняння $a^x = b$:

- 1) має один корінь, якщо $b > 0$ (рис. 152);
- 2) не має коренів, якщо $b < 0$ (рис. 153).

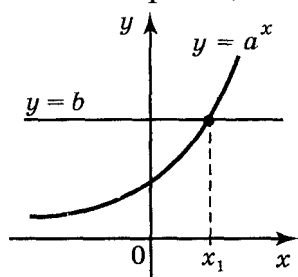


Рис. 152

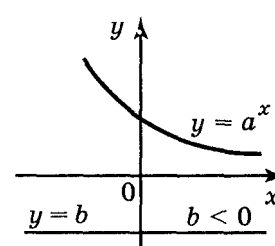
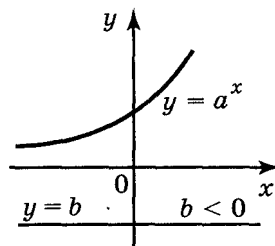
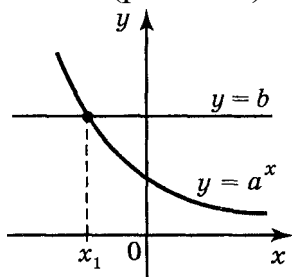


Рис. 153

Для того щоб розв'язати рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, треба b подати у вигляді $b = a^c$, тоді будемо мати $a^x = a^c$, звідси $x = c$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $5^x = 125$.

Розв'язання

Оскільки $5^x = 125$, а $125 = 5^3$, то маємо $5^x = 5^3$, звідси $x = 3$.

Відповідь: 3.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 49$.

Розв'язання

Оскільки $49 = 7^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$, то $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$, звідси $x = -2$.

Відповідь: -2.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $15^{x^2-5x+6} = 1$.

Розв'язання

Оскільки $1 = 15^0$, то $15^{x^2-5x+6} = 15^0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, звідси $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Відповідь: 2; 3.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $2^{x-2} = -2$.

Розв'язання

Оскільки $2^{x-2} > 0$ при всіх значеннях x , то рівняння коренів не має. *Відповідь:* немає коренів.

Приклад 5: $5^{x^2-6x-35\frac{1}{3}} = 625\sqrt[3]{25}$; $5^{x^2-6x-35\frac{1}{3}} = 5^{\frac{42}{3}}$;

$$x^2 - 6x - 35\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}; \quad x^2 - 6x - 40 = 0.$$

$$x_1 = 10; x_2 = -4.$$

Відповідь: 10; -4.

Приклад 6: $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3} = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3x+3x} = \frac{2}{3}$;

$$2x - 3x + 3 = 1; -x = -2; x = 2.$$

Відповідь: 2.

II. Набуття умінь у розв'язуванні простіших показникових рівнянь.

Початковий рівень

1. Які з чисел 0; 1; 2 є коренями рівняння $5^{x+2} = 125$?

Відповідь: 1.

2. Розв'яжіть рівняння: а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{1}{3}$; в) $5^{2x-1} = 5^3$; г) $7^{x-2} = 7^3$;

Відповідь: а) 3; б) 0; в) 2; г) 5.

3. Розв'яжіть рівняння: а) $2^x = 32$; б) $10^x = 1000$; в) $3^x = \frac{1}{9}$; г) $5^x = \frac{1}{25}$; д) $13^x = 1$.

Відповідь: а) 5; б) 3; в) -2; г) -2; д) 0.

Середній рівень

1. Розв'язати рівняння: а) $2^{x-1} = 4$; б) $0,5^{2x-1} = 0,125$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{1}{81}$; г) $27^x = \frac{1}{27}$.

Відповідь: а) 3; б) 2; в) 3; г) -1.

2. Розв'яжіть рівняння: а) $2^x - 2 = 0$; б) $3^x - 1 = 0$; в) $5^{x-1} - 1 = 0$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 1 = 0$.

Відповіді: а) 1; б) 0; в) 1; г) коренів немає.

3. Розв'яжіть рівняння: а) $3^x \cdot 3 = 81$; б) $2 \cdot 2^x = 32$; в) $5 \cdot 3^x = 15$; г) $7 \cdot 2^x = 28$.

Відповідь: а) 3; б) 4; в) 1; г) 2.

Достатній рівень

1. Розв'яжіть рівняння: а) $5^{x^2+x-12} = 1$; б) $3^{\frac{x-1}{x+1}} = 9$; в) $\frac{1}{7^{x^2-2x-3}} = 1$; г) $\frac{1}{5^{\frac{1}{x}}} = 125$.

Відповідь: а) -4; 3; б) -3; в) 3; -1; г) $-\frac{1}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; б) $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$; в) $\sqrt{2^x} = 4$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^x : 2^x = 0,01$.

Відповідь: а) 3; б) 4; в) 4; г) 2.

3. Розв'яжіть рівняння: а) $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$; б) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$.

Відповідь: а) -3; 1; б) 1; 5.

Високий рівень

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $5^{2x^2-2x} = 6^{2x^2-2x}$; б) $5^{x+1} = 8^{x+1}$; в) $7^{x-2} = 4^{2-x}$; г) $3^{\frac{x+2}{4}} = 5^{x+2}$.

Відповідь: а) 0; 1; б) -1; в) 2; г) -2.

2. Розв'яжіть рівняння: а) $6^{1+|x|} = 36$; б) $3^{|x-2|} = 9$.

Відповідь: а) -1; 1; б) 0; 4.

3. Розв'яжіть рівняння: а) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; б) $\pi^{|x|} = \cos x$.

Відповідь: а) 0; б) 0.

III. Набуття умінь розв'язувати показникові рівняння.

Розглянемо деякі способи розв'язування показникових рівнянь.

1. Спосіб приведення рівняння до спільної основи, тобто до рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Як відомо, показникова функція $y = a^x$, $a > 0$ і $a \neq 1$ монотонна, тому кожне своє значення вона приймає тільки при одному значенні аргументу. Із рівності $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ випливає, що $f(x) = g(x)$.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^3$.

Розв'язання

$$2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^3; 10^x = 10^{-1} \cdot 10^{3x-3}; 10^x = 10^{3x-4}; x = 3x - 4; x = 2.$$

Відповідь: 2.

2. Колективне розв'язування вправ із № 1 (17, 20, 49).

3. Спосіб винесення спільного множника за дужки.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$.

Розв'язання

$$3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63; 3^{x-2}(3^2 - 2) = 63; 3^{x-2} \cdot 7 = 63; 3^{x-2} = 9; x - 2 = 2; x = 4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0$.

Розв'язання

$$5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0; 2^{2x}(1 + 2^2) = 5^{2x}(1 - 5^{-1}); 2^{2x} \cdot 5 = 5^{2x} \cdot \frac{4}{5};$$

$$\frac{2^{2x}}{5^{2x}} = \frac{4}{25}; \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2; 2x = 2; x = 1.$$

Відповідь: 1.

4. Колективне розв'язування вправ

5. Спосіб приведення рівняння до квадратного.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

Розв'язання

$$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0; (7^2)^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0; (7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$$

Нехай $7^x = t$, тоді $t^2 - 8t + 7 = 0$; $t_1 = 7$; $t_2 = 1$.

Отже: 1) $7^x = 7$; $x = 1$; 2) $7^x = 1$; $7^x = 7^0$; $x = 0$.

Відповідь: 1; 0.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння (№ 1 (47)) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Розв'язання

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x; \frac{3 \cdot 4^{2x}}{9^{2x}} + \frac{2 \cdot 9^{2x}}{9^{2x}} = \frac{5 \cdot 4^x \cdot 9^x}{9^{2x}}; 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0.$$

Заміна $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, тоді $3y^2 - 5y + 2 = 0$, звідси $y_1 = \frac{2}{3}$; $y_2 = 1$.

Отже: 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; 2) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$; $x = 0$.

Відповідь: 0; $\frac{1}{2}$.

6. Колективне розв'язування рівнянь

7. Графічний спосіб розв'язування показникових рівнянь.

Приклад 6. Розв'яжіть графічно рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

Розв'язання

Будуємо графіки функцій $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = x + 1$ в одній системі координат.

Графіки функцій $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = x + 1$ перетинаються в точці, абсциса якої $x = 0$ (рис. 154).

Відповідь: $x = 0$.

8. Розв'яжіть рівняння графічно:

а) $3^x = 4 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 3$; в) $4^x = 5 - x$; г) $3^{-x} = -\frac{3}{x}$.

Відповідь: а) 1; б) -1; в) 1; г) -1.

IV. Сприймання і усвідомлення розв'язування найпростіших показникових нерівностей та тих, що безпосередньо зводяться до них.

Розв'язування показникових нерівностей часто зводяться до розв'язування нерівностей $a^x > a^b$ ($a^x \geq a^b$) або $a^x < a^b$ ($a^x \leq a^b$). Ці нерівності розв'язують, використовуючи монотонність (зростання, спадання) показникової функції.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $3^x < 27$.

Розв'язання

Запишемо дану нерівність у вигляді $3^x < 3^3$. Оскільки $3 > 1$, то функція $y = 3^x$ є зростаючою. Отже, при $x < 3$ виконується нерівність $3^x < 3^3$.

Відповідь: $x < 3$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}$.

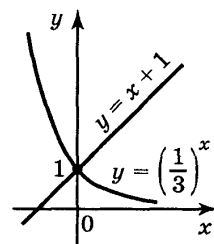


Рис. 154

Розв'язання

Запишемо дану нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^{\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

Оскільки $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ — спадна функція, то $x < -\frac{3}{2}$.

Відповідь: $x < -\frac{3}{2}$.

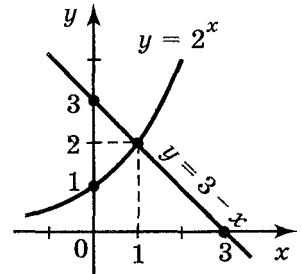


Рис. 155

Приклад 3. Розв'язати графічно нерівність $2^x < 3 - x$.

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 3 - x$ (рис. 155). Із рисунка видно, що $2^x \leq 3 - x$ при $x \leq 1$.

Отже, розв'язком нерівності $2^x < 3 - x$ є проміжок $(-\infty; 1]$.

Відповідь: $(-\infty; 1]$.

V. Формування умінь розв'язувати найпростіші показникові нерівності.

1. Розв'язування вправи № 2 (3, 6, 7, 9, 12, 15, 20).

2. Розв'яжіть графічно нерівності:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$; б) $3^x \geq 4 - x$.

Відповідь: а) $(-\infty; 0]$; б) $[1; +\infty)$.