ЛЕКЦІЯ №3

Тема занятя: Логарифм числа. Основна логарифмічна тотожність. Основні властивості логарифмів.

Мета заняття: Формування поняття логарифма числа. Познайомити учнів з основною логарифмічною тотожністю. Вивчення основних властивостей логарифмів. Познайомити учнів з логарифмуванням і потенціюванням виразів.

I. Сприймання і усвідомлення поняття логарифма числа, основної логарифмічної тотожності.

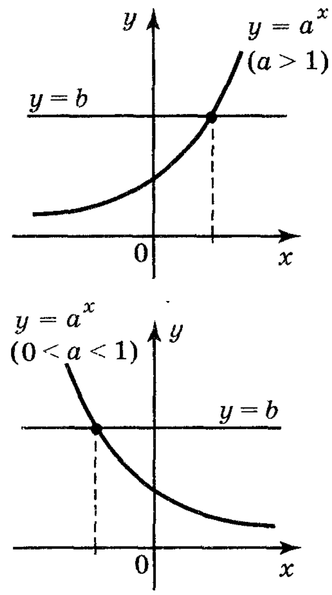

Рис. 162

Рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ (рис. 162) має єдиний корінь. Цей корінь називається логарифмом числа b за основою a і позначається $log_a b$.

Наприклад: коренем рівняння $2^x = 8$ є число 3, тобто $log_2 8 = – 3$.

Логарифмом додатного числа b за основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається *показник степеня,* до якого треба піднести число a, щоб одержати число b.

Наприклад: $log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$;

$log_2 \frac{1}{4} = – 2$, оскільки $2^{-2} = \frac{1}{4}$;

$log_7 1 = 0$, оскільки $7^0 = 1$.

Десятковими логарифмами називаються логарифми за основою 10, позначаються lg.

Наприклад, $lg100 = 2$, $lg0{,}0001 = - 4$.

Натуральними логарифмами називаються логарифми за основою e (число e — ірраціональне, $e == 2{,}718281828459045...$), позначаються ln.

Наприклад: $ln\ e = 1$, $ln\ e^2 = 2$, $ln \frac{1}{e} = -1$.

Означення логарифма можна коротко записати так: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$.

Ця рівність справедлива при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ називається основною логарифмічною тотожністю.

Наприклад: $2^{\log_2 5} = 5$, $2^{-\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

II. Сприймання і усвідомлення основних властивостей логарифмів.

При виконанні перетворень виразів, які містять логарифми, при обчисленнях і при розв'язуванні рівнянь, нерівностей часто використовуються властивості логарифмів.

Для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$ і будь-яких додатних x і y виконуються рівності:

1. $log_a 1 = 0$;
2. $log_a a = 1$;
3. $log_a xy = log_a x + log_a y$;
4. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;
5. $log_a x^p = p\, log_a x$ $(p \in R)$;
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} log_a x$ $(p \in R)$;
7. $log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $(b > 0, b \neq 1)$.

Доведемо рівності 3—7. За основною логарифмічною тотожністю

$$a^{\log_a x} = x \qquad \text{(I)}$$

$$a^{\log_a y} = y \qquad \text{(II)}$$

Перемноживши рівності (I) і (II), одержуємо:

$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$,

звідси за означенням логарифма маємо

$log_a xy = log_a x + log_a y$.

Отже, ***логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.***

Розділивши рівності (I) і (II), одержуємо: $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$,

звідси за означенням логарифма маємо: $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$.

Отже, ***логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.***

Піднісши ліву і праву частини рівності (I) до степеня з показником p, маємо:

$x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{p \log_a x}$ (III)

звідси за означенням логарифма маємо: $log_a x^p = p\, log_a x$.

Отже, ***логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.***

З рівності (III) маємо: $x^p (a^p)^{\log_a x}$, звідси за означенням логарифма маємо:

$\log_{a^p} x^p = \log_a x$, тоді $p \log_{a^p} x = \log_a x$; $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$.

Формула 7 називається ***формулою переходу від одної основи логарифма до другої основи.*** Доведемо її.

За правилом логарифмування степеня (формула 5) та основною логарифмічною тотожністю одержуємо:

$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x})$,

звідси $log_b x = log_a x \cdot log_b a$

або $log_a = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

За допомогою формули 7 можна знаходити логарифми з довільною основою a, маючи таблиці логарифмів, складених для якої-небудь основи b. Найбільш вживаними є таблиці десяткових і натуральних логарифмів.

III. Осмислення основних властивостей логарифмів.

1. Розглянемо приклади використання формул 3-7. Обчислимо:

1) $log_6 18 + log_6 2 = log_6(18 * 2) = log_6 36 = 2$;

2) $log_{12} 48 - log_{12} 4 = log_6 \frac{48}{4} = log_{12} 12 = 1$;

3) $log_6 \sqrt{3} = log_6 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_6 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

4) $log_{125} 5 = log_{125} 5 = \frac{1}{3} log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$;

5) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = log_4 16 = log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2$.

2. Використовуючи калькулятор (або таблиці), обчислимо:

1) $\log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx \frac{0{,}301}{0{,}477} \approx 0{,}631$;

2) $\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx \frac{0{,}693}{1{,}099} \approx 0{,}631$.

IV. Сприймання і усвідомлення логарифмування і потенціювання виразів.

! В Дія знаходження логарифма числа (виразу) називається *логарифмуванням.*

Приклад. Прологарифмуйте вираз $y = \frac{a^2b^2}{c^3}$.

Розв'язання

$$lg\, y = lg \frac{a^2b^2}{c^3} = lg\,(a^2b^2) - lg\, c^3 = lg\, a^2 + lg\, b^2 - lg\, c^3 = 2\, lga + 2\, lg\, b - 3\, lg\, c.$$

Дія, обернена до логарифмування, називається потенціюванням.

! *Потенціювання* — знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

Приклад. Пропотенціюйте вираз $lg\, x = \frac{1}{2} lg\, 5a - 3\, lg\, b + 4\, lg\, c$.

Розв'язання

$lg\, x = \frac{1}{2} lg\, 5a - 3\, lg\, b + 4\, lg\, c;$ $\quad lg\, x = lg\, (5a)^{\frac{1}{2}} - lg\, b^3 + lg\, c^4$;

$lg\, x = lg \sqrt{5a} - lg\, b^3 + lg\, c^4$; $lg\, x = lg\, (\sqrt{5a} \cdot c^4) - lg\, b^3$;

$lg\, x = lg \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}$; $x = \frac{c^4\sqrt{5a}}{b^3}$.

V. Підведення підсумків заняття.

Усне розв'язування вправ на обчислення логарифмів з використанням таблиці 4 для усних обчислень.

Таблиця 4

	1	2	3	4	5
1	$log_2 8$	$log_3 9$	$log_4 64$	$log_5 125$	$log_6 36$
2	$log_3 \frac{1}{9}$	$log_2 \frac{1}{16}$	$log_5 \sqrt{5}$	$log_4 2$	$log_9 3$
3	$\log_{\frac{1}{2}} 4$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_{\sqrt{3}} 3$	$\log_{\sqrt{3}} 1$	$log_{81} 3$
4	$5^{\log_5 4}$	$2^{-\log_2 6}$	$2^{1+\log_2 3}$	$3^{\log_3 2} - 1$	$3^{\log_3 2-1}$
5	$3^{2\log_3 2}$	$5^{-\log_5 3}$	$2^{\log_2 3+\log_2 5}$	$7^{\log_7 14-\log_7 2}$	$\log_4(3-\pi)$