ЛЕКЦІЯ №4

Тема: Побудова графіків функцій з застосуванням похідної. Найбільше і найменше значення функції на проміжку.

I. Усвідомлення і осмислення правила обчислення найбільшого і найменшого значення функції на відрізку.

Розглянемо рисунки 56 і 57, на яких зображено графіки функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, заданих на відрізку $[a; b]$. Функція $y = f(x)$ зростає, а функція $y = g(x)$ спадає. На відрізку $[a; b]$ найменше значення функції $y = f(x)$ дорівнює $f(a)$, а найменше значення функції $y = g(x)$ дорівнює $g(b)$. Відповідно найбільші значення цих функцій на даному відрізку дорівнюють $f(b)$ та $g(a)$. Отже, якщо функція неперервна і зростає (спадає) на деякому відрізку, то найбільше і найменше значення функція набуває на кінцях цього відрізка.

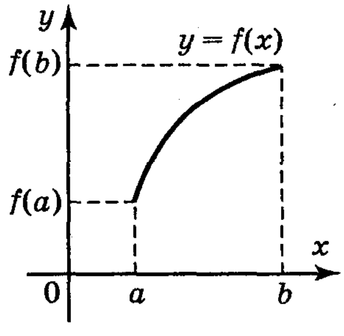

Рис. 56

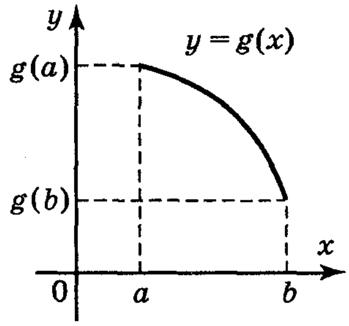

Рис. 57

Розглянемо рисунок 58, на якому зображено графіки трьох функцій. Аналіз цих графіків свідчить, що найбільше і найменше значення функцій неперервних і диференційованих на проміжку $[a; b]$ досягаються цими функціями або на кінцях відрізка, або в стаціонарних точках.

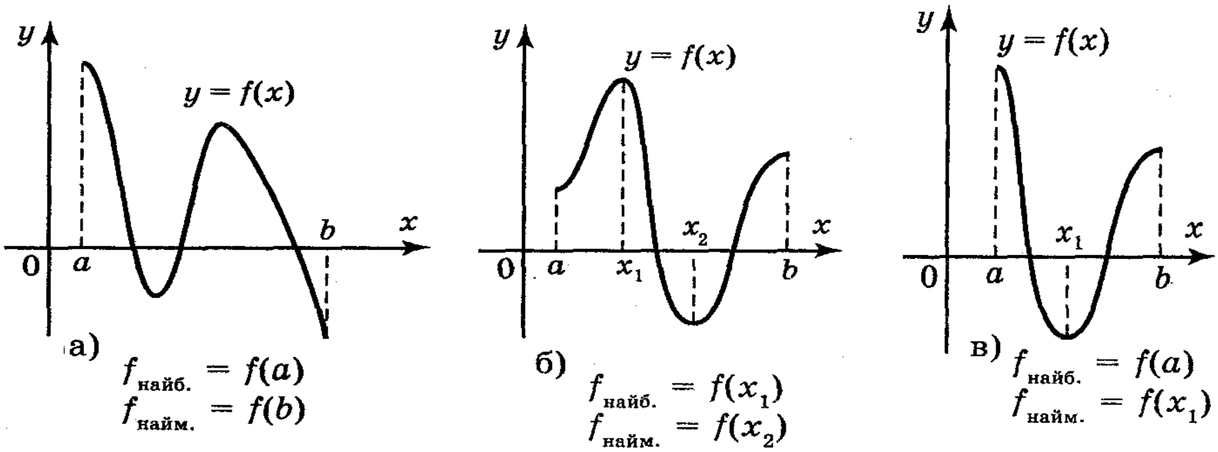

Рис. 58

Отже, неперервна і диференційована функція на заданому відрізку приймає найбільше і найменше значення в стаціонарних точках або на кінцях відрізка.

Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і має похідну в кожній внутрішній точці цього відрізку, то для знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку $[a; b]$ треба:

1) знайти значення функції на кінцях проміжку, тобто числа $f(a)$ і $f(b)$;
2) знайти значення функції в тих стаціонарних точках, які належать інтервалу $(a; b)$;
3) *із* знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x + e^{-x}$ на відрізку [-1; 2].

Розв'язання

Знайдемо значення функції в точках $x = -1$ та $x = 2$:

$f(-1) = -1 + e^{1} = e - 1$, $f(2) = 2 - e^{-2} = 2 - \frac{1}{e^2}$.

Знайдемо $f'(x)$: $f'(x) = (x + e^{-x})^1 = 1 - e^{-x}$. Знайдемо стаціонарні точки:

$f'(x) = 0$; $1 - e^{-x} = 0$; $1 - \frac{1}{e^{ч}} = 0$; $e^x = 1$; $x = 0$.

Знайдемо значення функції в точці $x = 0$: $f(0) = 0 + e^{\circ} = 1$.

Із чисел $e - 1 \approx 1{,}72$, $2 - \frac{1}{e^2} \approx 1{,}86$ та 1 найбільшим є $2 - \frac{1}{e^2}$, а найменшим -1.

Відповідь: $f_{найб.} = f(2) = 2 - \frac{1}{e^2}$; $f_{найм.} = f(0) = 1$.

II. Сприймання і усвідомлення загальної схеми дослідження функції і побудови її графіка.

Однією із основних задач математики є дослідження функції. Використання похідної значно полегшує задачу дослідження функції, а разом з тим і побудову її графіка.

Дослідження функції і побудову її графіка будемо виконувати за таким планом:

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо точки перетину графіка з координатними осями.
3. З'ясовуємо парність (непарність), періодичність функції.
4. Знаходимо похідну та стаціонарні точки.
5. Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму та екстремальні значення функції.
6. З'ясовуємо поведінку функції на кінцях області визначення.
7. На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції.

Слід мати на увазі, що не завжди треба чітко виконувати вказаний план. Наприклад, не завжди ми зможемо знайти точки перетину графіка з віссю *OX* (тобто нулі функції), навіть, якщо вони і існують. Інколи додатково знаходять координати деяких точок.

Приклад 1. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ *і* побудуйте її графік.

Розв'язання

1. $D(f) = R$.
2. Знайдемо абсциси точок перетину графіка з віссю *OX:*
   $x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$ або $x = 3$.
   Знайдемо ординату точки перетину графіка з віссю OY:
   $y = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.
3. Оскільки $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2$, то функція не є парною, не є непарною. Функція неперіодична.
4. Знайдемо похідну $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. $D(f') = R$. Знайдемо стаціонарні точки:

$f'(x) = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ або $x = 2$.

5. Складемо таблицю:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗
		max		min	

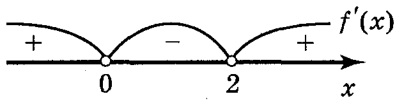

Рис. 63

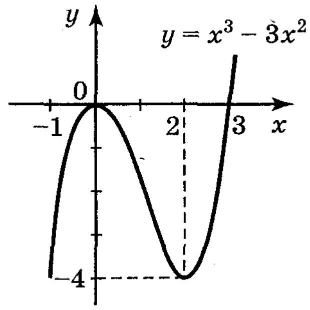

Рис. 64

Стаціонарні точки розбивають координатну пряму на три проміжки (рис. 63): $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$. На рисунку 63 вказано знаки похідної. (Символ ↗ в таблиці означає, що функція зростає, а символ ↘ означає, що функція спадає.)

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^3 - 3x^2$ (рис. 64).

Виконання вправ

1. Користуючись графіками функції $y = f(x)$, зображених на рисунку 65, з'ясуйте: 1) область визначення функції; 2) нулі функції і інтервали її знакопостійності; 3) точки екстремуму, екстремальні значення функції та інтервали її монотонності.

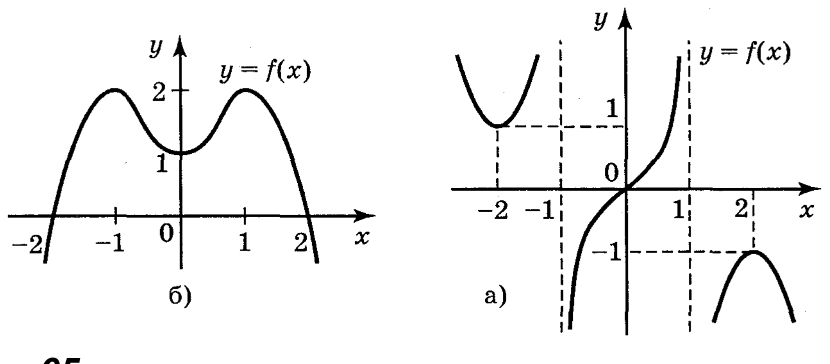

Рис. 65

2. На рисунку 66 зображено графік функції $y = f(x)$ визначеної і неперервної при $x \in R$. Користуючись графіком, укажіть - її властивості та заповніть таблицю:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$							
$f(x)$							

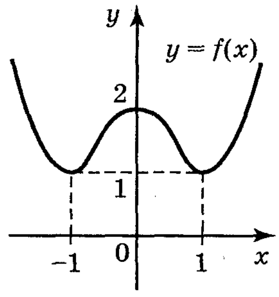

Рис. 66

3. Деякі властивості функції $y = f(x)$ описані в таблиці.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗	2	↘
		max		min		max	

Побудуйте схематичний графік функції, якщо вона неперервна на множині всіх дійсних чисел. 4. Побудуйте графіки функцій, дослідивши функції:

а) $y = x^4 - x^2$; б) $y = x^2 - x^3$; в) $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$; г) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

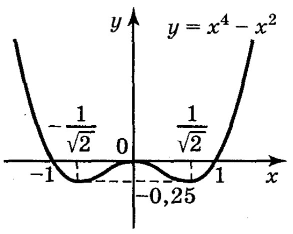

Рис. 67

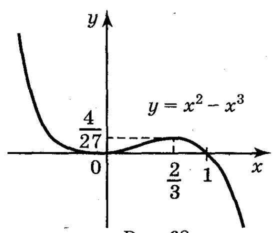

Рис. 68

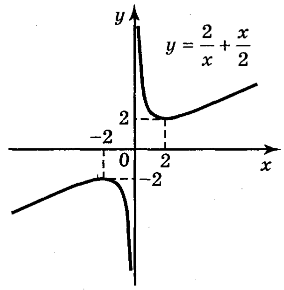

Рис. 69

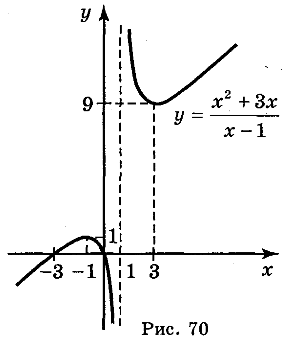

Рис. 70

Відповіді: а) рис. 67; б) рис. 68; в) рис. 69; г) рис. 70.

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ3 §23, §24, ст.207-221.