ЛЕКЦІЯ № 3

Тема: Ознака сталості функції. Достатні умови зростання й спадання функції. Екстремуми функції.

І. Сприймання і усвідомлення ознаки спадання та зростання функції на деякому проміжку.

За допомогою похідної можна встановлювати проміжки зростання і спадання функції.

Відомо, що функція $y = f(x)$ називається зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з рис. 32, утворює з додатним напрямом осі OX або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі OX).

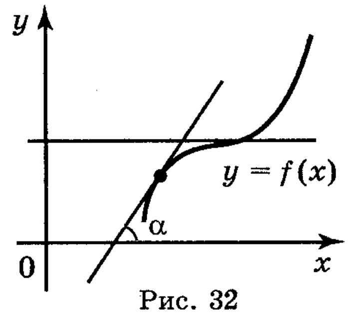

Рис. 32

Виходячи із геометричного змісту похідної: $tg\,\alpha = f'(x_o)$, це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід'ємна, тому для зростаючої функції $f(x)$ виконується умова: $f'(x) \geq 0$.

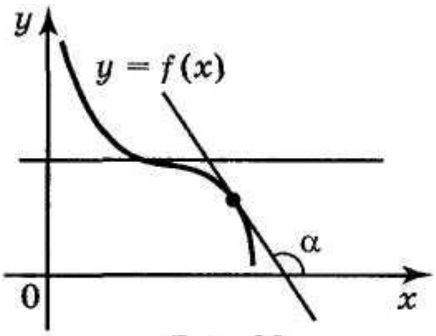

Рис. 33

Функція $y = f(x)$ називається спадною на проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать цьому проміжку, із умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$. Дотична в кожній точці графіка спадної функції (рис. 33) утворює з віссю *OX* або тупий кут, або кут, що дорівнює нулю, тому для функції $f(x)$, яка спадає на деякому проміжку, виконується умова $f'(x) < O$.

На рис. 34 видно також, що одна і та ж функція може на одному проміжку області її визначення зростати, а на іншому — спадати. Характер поведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її похідної.

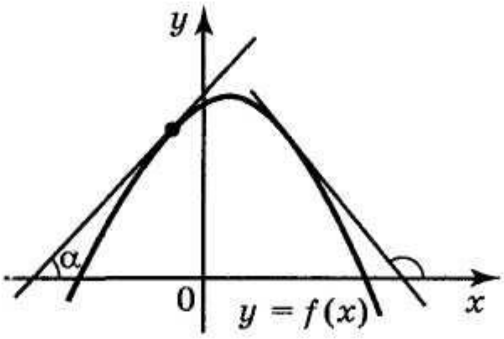

Рис. 34

Отже, наочне уявлення дозволяє сформулювати властивості зростаючих та спадних функцій.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована і зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не від'ємна.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не додатна.

Проте для розв'язування задач особливо важливими є обернені твердження, які виражають ознаки зростання і спадання функції на проміжку. Нехай значення похідної функції $y = f(x)$ додатні на деякому проміжку, тобто $f'(x) > 0$. Оскільки $f'(x) = \text{tg}\ \alpha$, то із умови $\text{tg}\ \alpha > 0$ випливає, що дотичні, проведені до графіка функції в будь-якій точці цього інтервалу, утворюють гострі кути з додатним напрямом осі OX. У цьому випадку графік функції «піднімається» на заданому проміжку, тобто функція зростає (рис. 35).

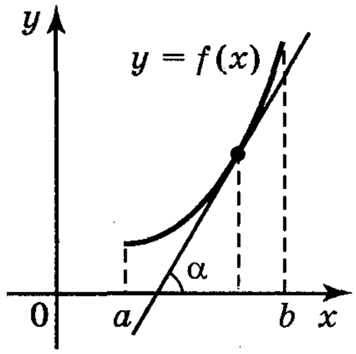

Рис. 35

Якщо $f'(x) < 0$ на деякому проміжку, то кутовий коефіцієнт дотичної $\text{tg}\ \alpha = f(x)$ до графіка функції $y = f(x)$ від'ємний. Це означає, що дотична до графіка функції утворює з віссю OX тупий кут і графік функції на цьому проміжку «опускається», тобто функція $f(x)$ спадає (рис. 36).

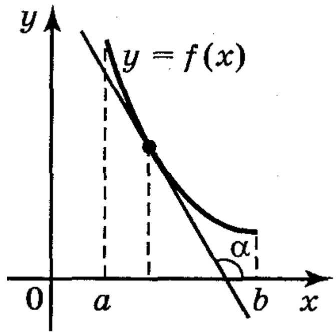

Рис. 36

Якщо $f'(x) > 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо $f(x) < 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Ці два твердження називаються ознаками зростання (спадання) функції на проміжку.

Строге доведення цих тверджень виходить за рамки шкільного курсу математики.

Проміжки зростання і спадання функції часто називають проміжками монотонності цієї функції.

Приклад 1. Доведіть, що функція $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Розв'язання

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^I = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)^I = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

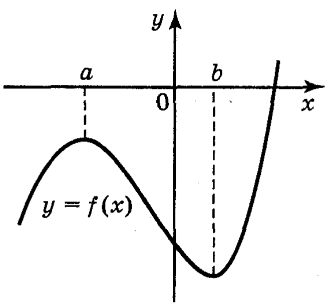

Рис. 38

Якщо $x > 1$, $\dfrac{x^2 - 1}{x^2} > 0$ то тобто $f'(x) > 0$ при $x > 1$, і тому функція зростає на проміжку $(1; +\infty)$.

Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким планом:

1. Знайти область визначення заданої функції $y = f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.
3. Розв'язати нерівності:
   а) $f'(x) > 0$, указати проміжки зростання функції $y = f(x)$;
   б) $f'(x) < 0$, указати проміжки спадання функції $y = f(x)$·

Приклад. Знайдіть проміжки монотонності функції $y = x^3 - 3x^2$.

Розв'язання

1. Область визначення функції: $D(y) = R$.
2. Знаходимо похідну $y' = 3x^2 - 6x$.
3. Розв'язуємо нерівності: а) $y' > 0$; б) $y' < 0$. Розв'язуємо ці нерівності методом інтервалів, для цього знаходимо нулі похідної: $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$ або $x = 2$. Наносимо на координатну пряму (рис. 37) нулі похідної і визначаємо знаки похідної на кожному проміжку:

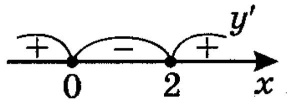

Рис. 37

$y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3 + 6 = 9 > 0;$

$y'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 - 1 = -3 < 0;$

$y'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9 > 0.$

а) $y' > 0$ в кожному із проміжків $(-\infty; 0); (2; +\infty)$, отже, функція на цих проміжках зростає.

б) $y' < 0$ на проміжку (0; 2), отже, функція на цьому проміжку спадає.

Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty;0);(2;+\infty)$; спадає на проміжку (0; 2).

II. Сприймання і усвідомлення поняття точок екстремуму та екстремуму функції.

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. Околом точки a називається будь-який інтервал, що містить цю точку. Наприклад, інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

Розглянемо графік функції, зображений на рис. 38. Як видно із рисунка, існує такий окіл точки $x = a$, що найбільше значення функція $y = f(x)$ в цьому околі набуває в точці $x = a$. Точку $x = a$ називають точкою максимуму цієї функції.

Аналогічно точку $x = b$ називають точкою мінімуму функції $y = f(x)$, оскільки значення функції в цій точці найменше порівняно зі значеннями функції в деякому околі точки b.

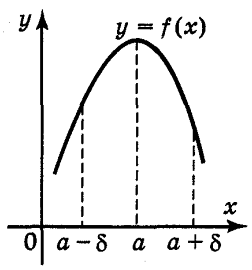

Рис. 39

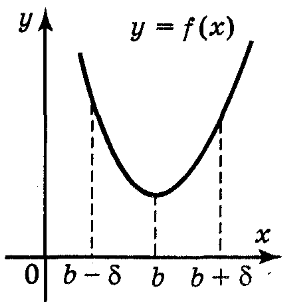

Рис. 40

Означення. Точка a із області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки a, що для всіх $x \neq a$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(a)$. (Рис. 39).

Означення. Точка b із області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки b, що для всіх $x \neq b$ із цього околу виконується нерівність $f(x) > f(b)$. (Рис. 40).

Точки максимуму і точки мінімуму називають точками екстремуму функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції).

Точки максимуму позначають x_{max} , а точки мінімуму — x_{min} . Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються відповідно: y_{max} і y_{min}.

Виконання вправ

1. Для функцій, графіки яких зображено на рисунках 41, α—*г* знайдіть:

1) точки максимуму і мінімуму функції;

2) екстремуми функції.

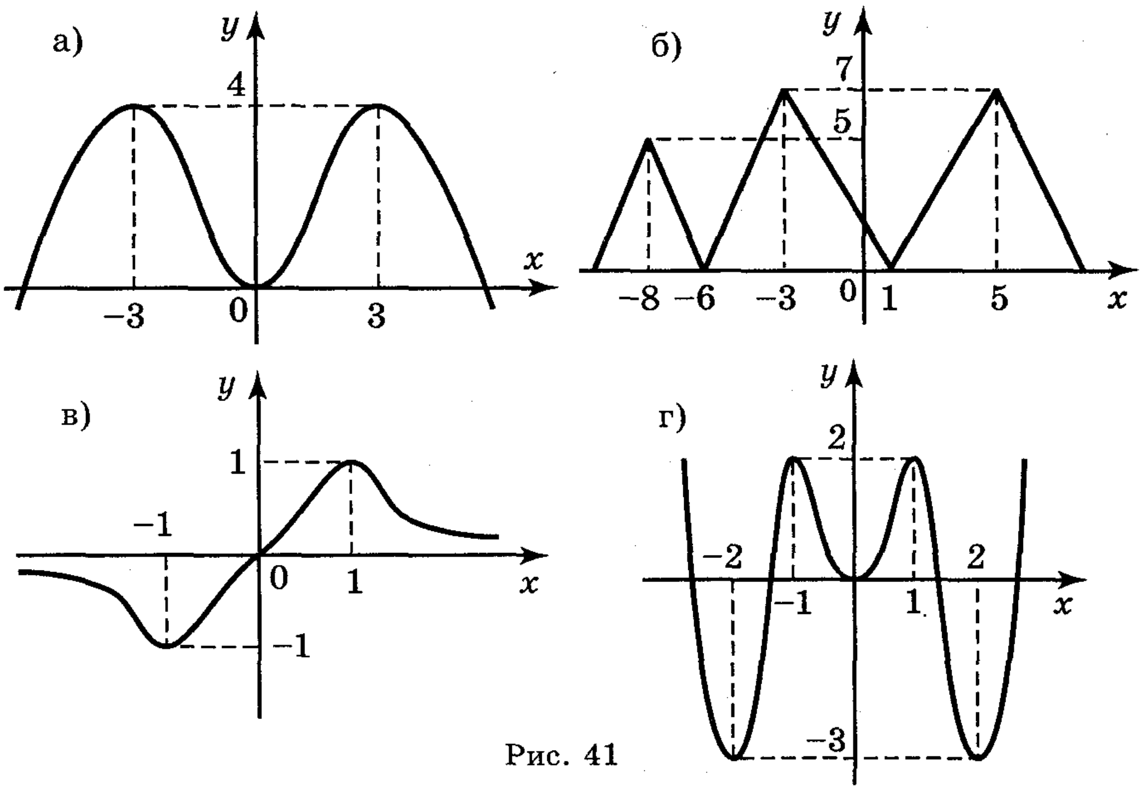

Рис. 41

Відповідь: 1) а) $x_{max}= 3$, $x_{min}= 0$, $x_{max}= 3$; *б)* $x_{max}= -8$, $x_{min}= -6$; $x_{max}= -3$; $x_{min} = 1$; $x_{max}= 5$; в) $x_{min}= -1$; $x_{max}= 1$; г) $x_{min}= -2$; $x_{max}= -1$; $x_{min}= 0$; $x_{max}= 1$; $x_{min}= 2$;
2) а) $y_{max}= 4$; $y_{min}=0$; б) $y_{max}= 5$; $y_{max}= 7$; $y_{min}= 0$; в) $y_{min}= -1$; $y_{max}= 1$; г) $y_{min} = -3$; $y_{min}= 0$; $y_{max}= 2$.

III. Сприймання і усвідомлення необхідної умови екстремуму, поняття стаціонарної точки.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_o і має похідну в цій точці.

Якщо x_o — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, то $f'(x_o) = 0$.

Це твердження називають теоремою Ферма на честь П'єра Ферма (1601—1665) — **французького математика.**

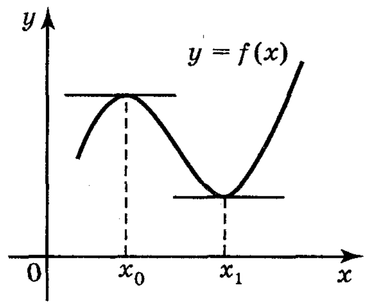

Рис. 42

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: в точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_o)$ дорівнює нулю (рис. 42).

Наприклад, функція $f(x) = x^2 - 2$ має в точці $x_o = 0$ мінімум (рис. 43), її похідна $f'(0) = 0$. Функція $f(x) = 1 - x^2$ (рис. 44) має максимум у точці $x_o = 0$, $f(x) = -2x$ і $f'(0) = 0$.

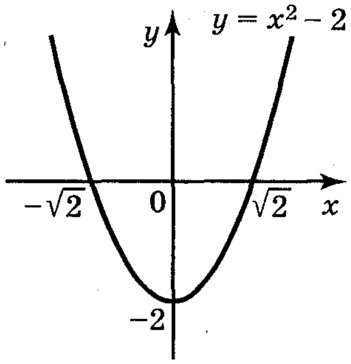

Рис. 43

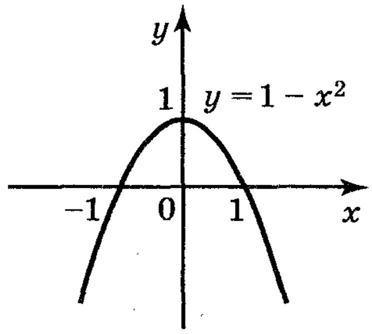

Рис. 44

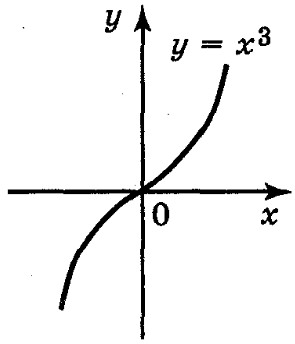

Рис. 45

Слід зазначити, що якщо $f'(x_o) = 0$, то x_o не обов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад, якщо $f(x) = x^3$, то $f`(x) = 3x^2$ і $f`(x_o) = 0$. Проте точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція $f(x) = x^3$ зростає на всій числовій осі (рис. 45).

Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рівняння $f'(x) = 0$, але не завжди корінь рівняння $f'(x) = 0$ є точкою екстремуму.

Внутрішні точки області визначення функції $y = f(x)$, у яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарними. Отже, для того щоб точка x_o була точкою екстремуму, необхідно, щоб вона була стаціонарною.

Виконання вправ

1. Знайдіть стаціонарні точки функції:

а) $y = 5 + 12x - x^3$; б) $y = 9 + 8x^2 - x^4$; в) $y = e^{2x} - 2e^x$, г) $y = \sin x - \cos x$.

Відповідь: а) $x = \pm 2$; б) $x = 0$, $x = \pm 2$; в) $x = 0$; г) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

IV. Сприймання і усвідомлення достатньої ознаки екстремуму функції.

Сформулюємо достатні умови того, що стаціонарна точка є точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

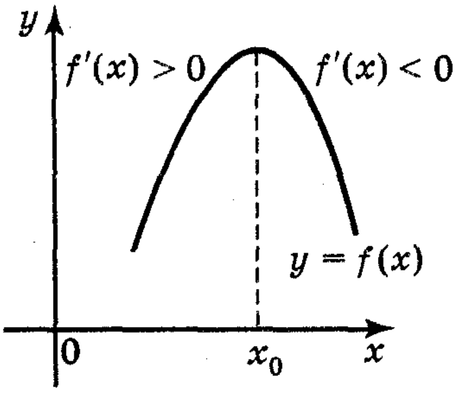

Рис. 46

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак з «+» на «–», то ця стаціонарна точка є точкою максимуму (рис. 46).

Дійсно, в цьому випадку ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точка максимуму.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч — додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак з «–» на «+», то ця стаціонарна точка є точка мінімуму (рис. 47).

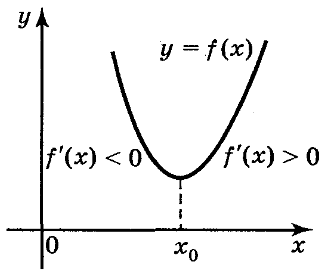

Рис. 47

Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

Приклад 1. Знайдіть точки екстремуму функції $f(x) = x^3 – 3x$.

Розв'язання

Область визначення даної функції — *R*.

Знайдемо $f`(x)$: $f`(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$.

Похідна існує для всіх $x \in R$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0$, $x^2 — 1 = 0$, $x = \pm 1$.

Наносимо область визначення та стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 48) і визначимо знак похідної на кожному проміжку:

$f`(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0;$

$f`(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = -3 < 0;$

$f`(2) = 3 \cdot (2)^2 - 3 = 9 > 0.$

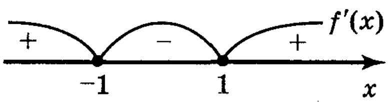

Рис. 48

Точка $\chi = -1$ є точкою максимуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «+» на «-»: $x_{max} = -1$.

Точка $x = 1$ — є точкою мінімуму, бо похідна при переході через цю точку змінює знак з «-» на «+»: $x_{min} = 1$.

Відповідь: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 1$.

Приклад 2. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^4 - 4x^3$.

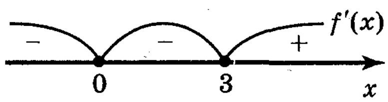

Рис. 49

Розв'язання

Область визначення функції — *R*.

Знайдемо похідну:

$f`(x) = (x^4 – 4x^3) = 4x^3 – 12x^2 = 4x^2(x – 3)$.

Знайдемо стаціонарні точки: $f`(x) = 0$, $4x^2(x – 3) = 0$, $x = 0$ або $x = 3$.

Наносимо стаціонарні точки на координатну пряму (рис. 49) та визначаємо знак похідної на кожному інтервалі.

$x = 3$ — точка мінімуму, бо при переході через цю точку похідна змінює знак з «–» на «+»: $x_{min} = 3$.

Точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, бо похідна не змінює знак при переході через цю точку.

Отже, $y_{min} = f(3) = 3^4 – 4 \cdot 3^3 = – 27$.

Відповідь: $y_{min} = f(3) = – 27$.

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ3 §21, §22 ст.190-206.