ЛЕКЦІЯ № 2

Тема заняття: Правила диференціювання. Похідна складеної функції.

І. Сприймання і усвідомлення теореми про похідну суми функції.

! ***Теорема:*** Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхня сума диференційована в цій точці і $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$. або коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x) + g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx. Тоді

$$\Delta y = y(x_o + \Delta x) - y(x_o) = f(x_o + \Delta x) + g(x_o + \Delta x) - f(x_o) - g(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) + g(x_o + \Delta x) - g(x_o) = \Delta f + \Delta g,$$

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Наслідки

а) Похідна різниці дорівнює різниці похідних. Нехай $y(x) = f(x) - g(x)$, тоді $f(x) = y(x) + g(x)$ і

$$f'(x) = y'(x) + g'(x), \text{ звідси } y'(x) = f'(x) - g'(x).$$

б) Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій, тобто

$$(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x))' = f'_1(x) + f'_2(x) + ... + f'_n(x)\ .$$

Приклад. Знайдіть похідні функцій

а) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$; б) $f(x) = cos\ x + sin\ x + 5;$ в) $f(x) = x^6 + tg\ x - ctg\ x$.

Розв'язання

а) $f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 2x + 1$;

б) $f'(x) = (\cos x + \sin x + 5) = (\cos x)' + (\sin x)' + 5' = -\sin x + \cos x + 0 = \cos x - \sin x$.

в) $f'(x) = (x^6 + \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x)' = (x^6)' + (\mathrm{tg}\, x)' - (\mathrm{ctg}\, x)' = 6x^5 + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x} \right) =$

$$= 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 6x^5 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{4\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{\sin^2 2x}$$

Відповідь: а) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$; б) $f'(x) = cos\ x - \sin x$; в) $f'(x) = 6x^5 + \dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

<u>Виконання вправ</u>

1. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x^3 + x - x^4$; б) $y = \sin x - \cos x$; в) $y = -x^3 + \mathrm{tg}\, x$; г) $y = \mathrm{ctg}\, x - \sqrt{x}$.

Відповідь: а) $y' = 3x^2 + 1 - 4x^3$; б) $y' = \cos x + \sin x$;

в) $y' = -3x^2 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$; г) $y = -\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ в точці x_o:

а) $f(x) = \sin x + x^2$, $x_o = 0$; б) $f(x) = \cos x - 1$, $x_o = \dfrac{\pi}{4}$; в) $f(x) = x^2 + x - 7$, $x_o = -1$.

Відповідь: а) 1; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) –1.

3. При яких значеннях x значення похідної функції $f(x)$ дорівнює 0:

а) $f(x) = x^3 - x;$ б) $f(x) = x^2 + x;$ в) $f(x) = x - \cos x$?

Відповідь: а) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $x = -\frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

ІІ. Сприймання і усвідомлення теореми про похідну добутку.

Теорема. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в точці x, то їхній добуток також — диференційована функція в цій точці і

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),$$

або коротко говорять: похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної функції на похідну другої функції.

Доведення

Розглянемо функцію $y = f(x)\cdot g(x)$. Зафіксуємо x_o і надамо аргументу приросту Δx, тоді

1) $\Delta y = f(x_o + \Delta x)\cdot g(x_o + \Delta x) - f(x_o)\cdot g(x_o)$.

Оскільки $f(x_o+\Delta x) = f(x_o) + \Delta f$, $g(x_o+\Delta x) = g(x_o) + \Delta g$, то

$\Delta y = (f(x_o)+\Delta f)\cdot(g(x_o)+\Delta g) - f(x_o)\cdot g(x_o) = f(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x_o) + \Delta f\cdot\Delta g - f(x_o)\cdot g(x_o) = f(x_o)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x_o) + \Delta f\cdot\Delta g.$

2) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x_0) + \Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)\cdot\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot g(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} + g(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\cdot\Delta g}{\Delta x} = f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x =$$

$= f'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g'(x_o) + f'(x_o)\cdot g'(x_o)\cdot 0 = f'(x_o)\cdot g(x_o) + f(x_o)\cdot g(x_o).$

Отже, $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x).\ g(x) + f(x).\ g'(x).$

Наслідки

а) Постійний множник можна винести за знак похідної: $(cf(x))' = cf'(x)$.

Дійсно, $(cf(x))' = c'\cdot f(x) + c\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + c\,f'(x) = c\,f'(x).$

б) Похідна добутку декількох множників дорівнює сумі добутків похідної кожного із них на всі останні, наприклад:

$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x).$

Приклад. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = x\cdot\sin x$; б) $y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7tg\,x$; в) $y = (x-1)(x+2)\cdot\cos x.$

Розв'язання

а) $y' = (x\sin x)' = x'\sin x + x(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cos x = \sin x + x\cos x;$

б) $y' = (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\,\mathrm{tg}\,x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7\,tg\,x)' =$

$=5\cdot(x^5)' + 6\cdot(x^2)' + 2\cdot x' - 7\cdot(\mathrm{tg}\,x)' = 5\cdot 5x^4 + 6\cdot 2\cdot x + 2\cdot 1 -$

$7\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 25x^4 + 12x + 2 - \frac{7}{\cos^2 x};$

в) $y' = ((x-1)(x+2)\cos x)' = (x-1)'(x+2)\cos x + (x-1)(x+2)'\cos x + (x-1)(x+2)\cdot(\cos x)' =$

$=1\cdot(x+2)\cos x + (x-1)\cdot 1\cdot\cos x + (x-1)(x+2)\cdot(-\sin x) =$

$=(x+2)\cos x + (x-1)\cos x - (x-1)(x+2)\sin x = (2x+1)\cos x - (x-1)(x+2)\sin x.$

Виконання вправ.

1. Знайдіть похідну функцій:

а) $y = 3x^2 - 5x + 6$; б) $y = -2x^3 + 3\cos x$; в) $y=5x^2+\frac{6}{x^2}+3ctgx$; г) $y=3x\cdot x^2+9\frac{x^2}{x^4}$.

Відповідь: а) $6x - 5$; б) $-6x^2 - 3\sin x$; в) $10x - \frac{12}{x^3} - \frac{3}{\sin^2 x}$; г) $9x^2 - \frac{18}{x^3}$

2. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x}\,\sin x$; б) $y = x^2\cos x$; в) $y = \frac{\sin x}{x^6}$; г) $y = x^2\sqrt{x}\,\sin x$.

Відповідь: а) $y' = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x$; б) $y' = 2x\cos x - x^2\sin x$;

в) $y' = \frac{-6\sin x}{x^7} + \frac{\cos x}{x^6}$; г) $y' = 2x\sqrt{x}\sin x + \frac{x^2\sin x}{2\sqrt{x}} + x^2\sqrt{x}\cos x$.

3. Знайдіть похідні функцій:

а) $(x - 2)^2 \cdot x^3$; б) $(x^2 - x)(x^3 + x)$.

Відповідь: а) $2(x - 2)x^3 + 3(x - 2)2x^2$; б) $(2x - 1)(x^3 + x) + (x^2 - x)(3x^2 + 1)$.

III. Сприймання і усвідомлення теореми про похідну частки функцій.

! **Теорема.** Якщо функції f(x) і g(x) диференційовані в точці x і $g(x)\neq 0$, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ диференційована в цій точці і

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доведення

Формулу похідної частки можна вивести, скориставшись означенням похідної. Проте це зробити можна простіше.

Нехай $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, тоді $f(x) = y(x) \cdot g(x)$. Знайдемо похідну функції $f(x)$, скориставшись теоремою про похідну добутку, $f'(x) = y'(x) \cdot g(x) + y(x) \cdot g'(x)$. Виразимо з цієї формули $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{f'(x) - y(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$$

і підставимо замість $y(x)$ значення $\frac{f(x)}{g(x)}$, тоді будемо мати:

$$y'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{\left(f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}\cdot g'(x)\right)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Отже, $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Приклад. Знайдіть похідні функцій а) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y = \frac{x^3}{\sin x}$.

Розв'язання

а) $$y' = \left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2+1) - x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}.$$

б) $y' = \left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)' = \dfrac{(x^3)'\sin x - x^3(\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}$.

Виконання вправ

1. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; б) $y = \dfrac{x^2+x}{x^2-x}$; в) $y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$; г) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. *Відповідь:* а) $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$;
б) $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$; в) $y' = \dfrac{6}{(3x+1)^2}$; г) $y' = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

2. Знайдіть похідні функцій:

а) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; б) $\dfrac{\sin x - \cos x}{x}$; в) $\dfrac{x}{\sin x}$; г) $\dfrac{\cos x}{x^2}$.

Відповідь: а) $\dfrac{-1-\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\dfrac{x\cos x + x\sin x - \sin x + \cos x}{x^2}$; в) $\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$;

г) $\dfrac{-\sin x\cdot x^2 - 2x\cos x}{x^4} = \dfrac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$.

IV. Сприймання і усвідомлення поняття складеної функції та її похідної.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Нехай треба обчислити по заданому значенню χ значення функції *у*, яка задана формулою $y = \sqrt{9-x^2}$.

Для цього спочатку треба обчислити за заданим значенням *х* значення $u = g(x) = 9 - x^2$, *а* потім за значенням *u* обчислити $y = f(u) = \sqrt{u}$.

Отже, функція *g* ставить у відповідність числу *x* число *u*, а функція *f* — числу *u* число *у*. Говорять, що *у* є складеною функцією із функцій *g i f, і* пишуть $y = f(g(x))$·

Функцію *g(x)* називають внутрішньою функцією, або проміжною змінною, функцію *f(u)* — зовнішньою функцією. Отже, щоб обчислити значення складеної функції $y = f(g(x))$ в довільній точці *x,* спочатку обчислюють значення *й* внутрішньої функції *g,* а потім *f(u).*

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = \sqrt{\cos x}$. Вона є складеною із функцій $u = \cos x$, $y = \sqrt{u}$, де cos *x* — внутрішня функція, $\sqrt{u}$ — зовнішня функція.

Приклад 3. Запишіть складені функції *f(g(x))* і *g(f(x)),* якщо $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$.

Розв'язання

$f(g(x)) = \sin g(x) = \sin x^2$;

$g(f(x)) = (f(x))^2 = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Виконання вправ

1. Задайте формулами елементарні функції *f* і *g,* із яких побудована складена функція $y = f(g(x))$:

а) $y = \cos(2x + 3)$; б) $y = (2x + 3)^7$; в) $y = \sqrt{x^2+2x}$; г) $y = \sin^2 x$.

Відповіді: а) $u = g(x) = 2x + 3$; $y = f(u) = \cos u$;

б) $и = g(x) = 2x+3$; $y = f(u) = u^7$;

в) $u = g(x) = x^2 + 2x$; $y = f(и) = \sqrt{u}$;

г) u = g(x) = sin x;   y = f(u) = u^2.

2. Дано функції: $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = x^5 + 1$. Побудуйте функції:
а) $y=f(g(x))$; б) $y=f(h(x))$; в) $y = g(f(x))$; г) $y = g(h(x))$; д) $y= h(f(x))$; є) $y = h(g(x))$.
Відповіді: а) $y = \sin g(x) = \sin\sqrt{x}$;   б) $y = \sin h(x) = \sin(x^5 +1)$;

в) $y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sin x}$;   г) $y = \sqrt{h(x)} = \sqrt{x^5+1}$;

д) $y = f^5(x) +1 = \sin^5 x +1$; є) $y = g^5(x) +1 = (\sqrt{x})^5 +1 = x^2\sqrt{x} + 1$.

У складеній функції $y = f(g(x))$ присутня проміжна змінна $u=g(x)$. Тому при знаходженні похідної складеної функції ми будемо вказувати, по якій змінній взято похідну, використовуючи при цьому спеціальні позначення:

$y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — похідна функції y по аргументу x;

$y'_u = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ — похідна функції y по аргументу u;

$u'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ — похідна функції u по аргументу x.

Теорема. Похідна складеної функції $y = f(g(x))$ знаходиться за формулою

$y^I_x = y^I_u \cdot u^I_x$ *де* u = g(x),

або похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішній функції по проміжній змінній, помноженій на похідну внутрішньої функції по основному аргументу.

Доведення

Будемо вважати, що функція $u = g(x)$ має похідну в точці x_o, а функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u_o = g(x_o)$, тобто існують границі $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ і $\Delta u = g(x_o + \Delta x) - g(x_o) \neq 0$.

Нехай аргументу x_o надано приросту Δx, тоді змінна u набуде приросту $\Delta u \neq 0$. Поскільки $g(x)$ одержала приріст Δu, то функція y також одержить приріст $\Delta y = f(u + \Delta u) – f(u)$. Приріст Δx зумовив виникнення приросту Δu і Δy.

Подамо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta u}$. Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$ (при цьому $\Delta u\to 0$).

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

або $y^I_x = y^I_u \cdot u^I_x$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $y = (3x^3 – 1)^5$.

Розв'язання

$y = (3x^3 – 1)^5$ — складена функція $y = u^5$, *де* $u = 3x^3 – 1$, тоді $y^I_x = y^I_u \cdot u^I_x$
$y' = (u^5)' \cdot (3x^3 – 1)' = 5u^4 \cdot 9x = 5(3x^3 -1)^4 \cdot 9x = 45x(3x^3 – 1)^4$.

При обчисленні похідної складеної функції явне введення допоміжної букви u для позначення проміжного аргументу не є обов'язковим. Тому похідну даної функції знаходять відразу як добуток похідної степеневої функції u^5 на похідну від функції $3x^3 - 1$:
$y' = ((3x^3 - 1)^5)' = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot (3x^3 - 1)' = 5 \cdot (3x^3 - 1)^4 \cdot 9x = 45x(3x^3 - 1)^4$.

***Приклад* 2.** Знайдіть похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$; *б)* y = sin (3x + 5); *в)* $y = \cos^2 x$; *г)* $y = \cos x^2$.

Розв'язання

а) $y' = (\sqrt{x^2 + 2x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot (x^2 + 2x)' = \dfrac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$;

б) $y' = (\sin(3x + 5))' = \cos(3x + 5) \cdot (3x\cdot + 5)' = 3\cos(3x + 5)$;

в) $y = (\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = = -2\cos x \sin x = -\sin 2x;$

г) $y' = (\cos x^2)' = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -2x \sin x^2$.

<u>Виконання вправ</u>

1. Знайдіть похідні функцій:

а) $y = (3x + 2)^{50}$; б) $y = (6 - 7x)^{10}$; в) $y = \sqrt{3 - 2x}$; г) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 7}$.

Відповідь: а) $y' = 150 \cdot (3x + 2)^{49}$; б) $y' = -70 \cdot (6 - 7x)^9$;

в) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$; г) $y' = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 7}}$.

2. Знайдіть похідні функцій:

а) $y' = \cos 6x$; б) $y = \sin^3 x$; в) $y = \sqrt{tgx}$, г) $y = ctg\, x^4$.

Відповідь: а) $y' = -6 \sin 6x$; б) $y' = 3\sin^2 x \cos x$;

в) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{tg}\, x} \cdot \cos^2 x}$; г) $y' = -\dfrac{4x^3}{\sin^2 x^4}$.

Таблиця диференціювання

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(f(g(x)))' = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$, де $u = \mathrm{g}(x)$.	

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ3§20, ст.180-185.§18, ст.171-174.§19, ст.178-180.

[2 Бевз Г.П., Бевз В.Г.] Розділ3 §16, ст.126-129.

Таблиця 1

Правила диференціювання

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(Cf(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$