ЛЕКЦІЯ № 1.

Тема: Границя функції в точці. Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст.

І. Сприймання поняття границі функції.

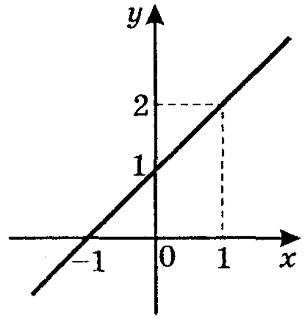

Рис. 9

Побудуємо графік функції $f(x) = x + 1$ (рис. 9). Якщо x наближається до 1**,** то значення y наближається до 2.

Говорять, що границя функції $f(x)$ при x, що наближається до 1, дорівнює 2 і записується: $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Розглянемо другий приклад.

Побудуємо графік функції $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ і розглянемо поведінку цієї функції при x, близьких до 1.

Функція $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ визначена при $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ і графік являє собою пряму $y = x + 1$ з виколотою точкою $x = 1$ (рис. 10), бо функція $g(x) =$

$= \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не визначена в точці $x = 1$.

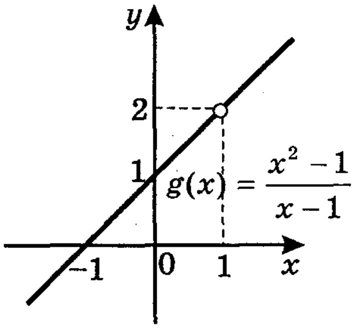

Рис. 10

Якщо x наближається до 1 (зліва чи справа), то y наближається до 2 (відповідно знизу чи зверху).

Отже, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Розглянемо третій приклад. Побудуємо графік функції

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & якщо\ x \ge 1, \\ x, & якщо\ x < 1 \end{cases}$$

(рис. 11) і розглянемо поведінку функції при x, що наближається до 1.

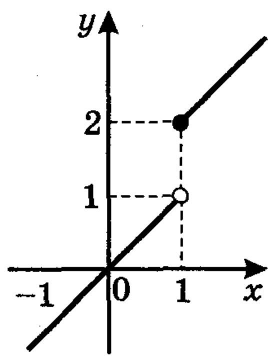

Рис. 11

При $x \to 1$ (що наближається до 1) границі функції $h(x)$ не існує, поскільки не існує єдиного числа, до якого наближається функція при x, що прямує до 1.

(Якщо x наближається до 1 зліва, то $h(x)$ наближається до 1; якщо ж x наближається до 1 справа, то $h(x)$ наближається до 2).

Таким чином:

Якщо при значеннях x, що прямують до деякого числа a, значення функції $f(x)$ прямують до єдиного значення b, то говорять, що при x, що наближається до a, функція $f(x)$ має границю, яка дорівнює b, і це записується так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ або $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Виконання вправ

1. Використовуючи графіки функцій (рис. 12), з'ясуйте:

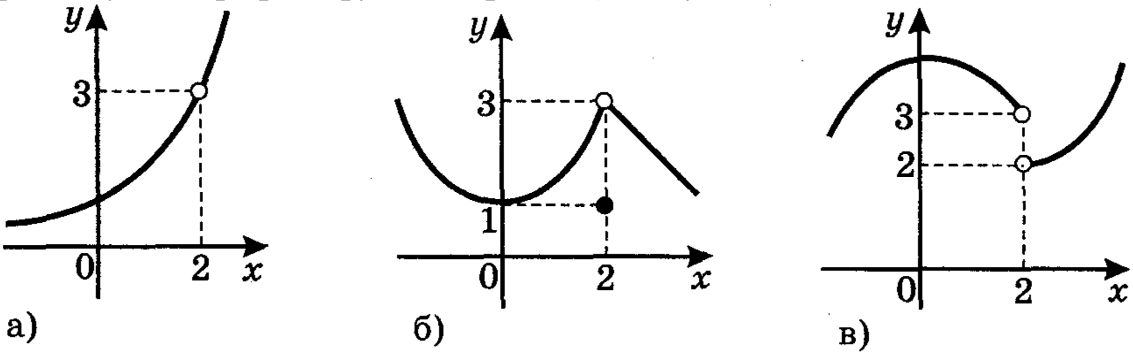

Рис. 12

1) Чи має границю функція в точці x, що прямує до 2? Якщо має, то чому дорівнює ця границя?
2) Чи залежить існування границі функції в точці від визначеності функції в цій точці?
3) Якщо функція визначена в точці, то чи завжди границя функції дорівнює значенню функції в цій точці? 2. Користуючись графіком, знайти границі (якщо вони існують): а) $\lim\limits_{x\to 3} 5x$; б) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

II. Осмислення поняття границі функції.

Нехай задано деяку функцію, наприклад, $f(x) = 2x + 1$. Розглянемо таблицю значень цієї функції в точках, що досить близько розташовані до числа 1 (і в самій точці 1), та знайдемо $|x - 1|$ та $|f(x) - 3|$ у відповідних точках.

x	0,5	0,8	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,5
$f(x)$	2	2,6	2,8	2,98	2,998	3	3,002	3,02	3,2	4
$\|x - 1\|$	0,5	0,2	0,1	0,01	0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,5
$\|f(x) - 3\|$	1	0,4	0,2	0,02	0,002	0	0,002	0,02	0,2	1

З таблиці видно, що при наближенні значення аргументу до числа 1 значення функції наближається до числа 3, при цьому похибка значень функції може бути досягнена як завгодно малою, шляхом зменшення похибки аргументу. Дійсно, взявши довільне $\varepsilon > 0$, тоді $|f(x) - 3| < \varepsilon$,

або $|2x + 1 - 3| < \varepsilon$; $|2x - 2| < \varepsilon$, $2|x - 1| < \varepsilon$; $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Отже, щоб похибка значень функції не перевищувала $\varepsilon > 0$, слід взяти значення x такі, що $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

! Число b називається границею функції $y = f(x)$ в точці a, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x: $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. (Рис. 13).

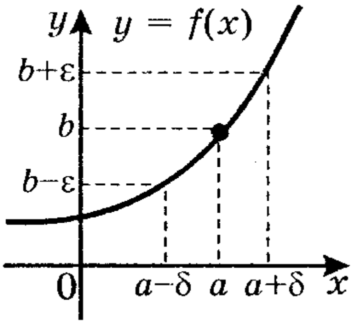

Рис. 13

Розглянемо *приклад.*

Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$.

Розв'язання Задамо довільне ε > 0 і покажемо, що існує δ > 0 таке, що із нерівності $|x - 3| < \delta$ випливає нерівність $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Маємо $|(2x - 1) - 5| < \epsilon$,

$|2x - 6| < \varepsilon$; $|2(x - 3)| < \varepsilon$; $2\cdot|x - 3| < \varepsilon$; $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ Отже, якщо взяти $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то виконання нерівності $|x - 3| < \delta$ приведе до виконання нерівності $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Отже, згідно з означенням границі маємо: $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$.

Виконання вправи № 12 (3).

III. Сприймання основних теорем про границі.

У курсі математичного аналізу (в підручнику теж є доведення) доводяться такі теореми, які ми приймемо без доведення.

1. Якщо функція *f(x)* має границю при $x \to a$, то ця границя єдина.

2. Границя постійної функції дорівнює постійній $\lim\limits_{x\to a} C = C$, де *C* — постійна.

3. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їхніх границь, при умові, що границі доданків існують.

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

4. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо границі множників існують

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

5. Постійний множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to a}(Cf(x)) = C\lim_{x\to a} f(x).$$

6. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Сформульовані теореми використовуються при знаходженні границь функцій.

Приклад 1. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{2x}{x-5}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 15}\frac{2x}{x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to 15}2x}{\lim\limits_{x\to 15}(x-5)}=\frac{2\cdot 5}{15-5}=\frac{30}{10}=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 2. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+x^2-x+1\right)$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2-x+1)=\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1=$$

$$=\left(\lim_{x\to 1}x\right)^3+\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1=1^3+1^2-1+1=2.$$

Відповідь: 2.

Виконання вправ

1. Знайдіть границі:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x+4\right)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(-2x+1\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{2-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-2}{2x+3}$.

2. Відомо, що $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=-2$.

Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 1}(3f(x)\cdot g(x))$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)-g(x))$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-g(x))^2$.

Приклад 3. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Розв'язання

В цьому прикладі безпосередньо скористатися теоремами про границі не можна, бо границя знаменника дорівнює нулю. Оскільки в означенні границі $|x-a|>0$, тобто $|x-a|\neq 0$, то маємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 1}(x+2)=2+2=4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 4. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^3-x}$

Розв'язання

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{1}{0-1}=-1.$$

Відповідь: – 1.

Виконання вправ

1. Знайдіть границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+x^2}{x^4+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

IV. Сприймання матеріалу про границю відношення $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$.

Розглянемо таблицю відношень $\dfrac{\sin x}{x}$, якщо $x\to 0$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\sin x$	≈0,8415	≈0,0998	≈0,010	≈0,001	≈0,0001	≈0,00001
$\dfrac{\sin x}{x}$	≈0,8415	≈0,9983	≈1	≈1	≈1	≈1

x	- 1	- 0,1	- 0,01	- 0,001	- 0,0001	- 0,00001
$\sin x$	≈- 0,8415	≈- 0,0998	≈- 0,010	≈- 0,001	≈- 0,0001	≈- 0,00001
$\dfrac{\sin x}{x}$	≈0,8415	≈0,9983	≈1	≈1	≈1	≈1

З таблиці видно, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Обґрунтуємо одержану рівність. Розглянемо одиничне коло та гострий кут P_0OA, хорду P_0B та дотичну до кола P_0A(рис. 14).

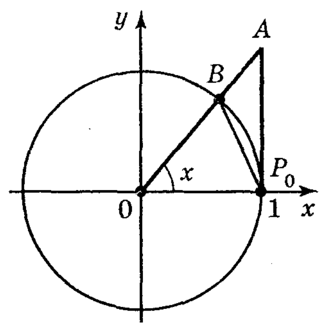

Рис. 14

Тоді $S_{\Delta OP_0B}<S_{\text{сект}.OP_0B}<S_{\Delta OP_0A}$

Оскільки $S_{\Delta OP_0B}=\dfrac{1}{2}OP_0\cdot OB\cdot\sin x=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x=\dfrac{\sin x}{2}$,

$S_{\text{сект}.OP_0B}=\dfrac{1}{2}OP_0^2\cdot x=\dfrac{1\cdot x}{2}=\dfrac{x}{2}$.

$S_{\Delta OP_0A}=\dfrac{1}{2}OP_0\cdot P_0A=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\dfrac{tgx}{2}$, то $\dfrac{\sin x}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{tgx}{2}$, або $\sin x<x<tgx$ при

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Звідси $\dfrac{\sin x}{\sin x}<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{tgx}{\sin x}$; $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$; $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$.

При x → 0 маємо $\cos x\to 1$; отже, $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Якщо

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, то $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}\to 1$ при $-x\to 0$ $\left(0<-x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x}=7\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=7\cdot 1=7$$

Відповідь: 7.

Виконання вправ

---

1. Знайдіть границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Відповідь: а) 1; б) 5; в) 2; г) $\dfrac{6}{5}$; д) $\dfrac{2}{3}$.

V. Мотивація навчання.

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної. Отже, наша найближча мета — познайомитися з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ, до вивчення геометричних понять.

VI. Сприймання і усвідомлення поняття миттєвої швидкості прямолі-нійного руху матеріальної точки.

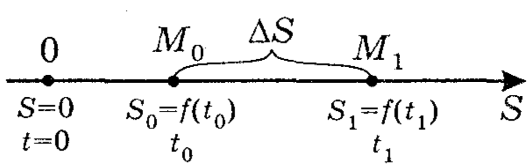

Рис. 20

Нехай матеріальна точка M рухається прямолінійно по закону s = $f(t)$ (рис. 20).

В момент часу t_0 вона зайняла положення M_0 і пройшла шлях $S_0 = f(t_0)$. Знайдемо швидкість точки в момент часу t_0.

Припустимо, що за довільно вибраний проміжок часу Δt, починаючи з моменту t_0, точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення M_1. Тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

За проміжок часу Δі матеріальна точка проходить шлях

$\Delta x = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Середня швидкість υ руху на проміжку M_0M_1

дорівнює: $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Ця величина дає лише приблизне уявлення про швидкість руху матеріальної точки на розглянутому проміжку. Вона буде більш точніша, якщо проміжок Δt буде зменшуватися.

Таким чином, можна вважати, якщо Δt наближається до нуля, то середня швидкість $v_{сер.} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ буде наближатися до швидкості в момент часу t_0.

! *Миттєвою швидкістю* точки, яка рухається прямолінійно, в момент часу t_0 називається границя середньої швидкості при умові, що Δt наближається до нуля.

$$v_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Числа Δt, Δs називаються відповідно приростом часу, приростом шляху.

Отже, миттєвою швидкістю точки, яка рухається прямолінійно, є границя відношення приросту шляху Δs до відповідного приросту часу Δt, коли приріст часу наближається до нуля.

Приклад 1.

Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 5t^2 + t + 3$ (s — шлях в метрах, t – час в секундах). Знайдіть швидкість точки:

а) в довільний момент t_0; б) в момент часу t = 2 с.

Розв'язання

а) 1) нехай значення аргументу t_0 одержало приріст Δt, тоді $t_1 = t_0 + \Delta t$.

2) Знайдемо відповідний приріст шляху

$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = 5(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 3 - (5t_0^2 + t_0 + 3) = 5t_0^2 + 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 3 - 5t_0^2 - t_0 - 3 = 10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t.$

3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу (середню швидкість): $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{10t_0\Delta t + 5\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \dfrac{\Delta t(10t_0 + 1 + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t_0 + 1 + 5\Delta t$

4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту часу (середньої швидкості): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(10t_0 + 1 + 5\Delta t\right) = 10t_0 + 1$

Отже, миттєва швидкість точки в довільний момент часу t_0 дорівнює $10t_0 + 1$.

Отже, при заданому законі руху $s(t)$ миттєва швидкість $v(t)$ в довільний момент часу t обчислюється по формулі $v(t) = 10t + 1$.

б) Якщо t = - 2 с, то маємо $v(2) = 10 \cdot 2 + 1 = 21 \left(\frac{м}{с}\right)$;

Відповідь: а) $10t + 1$; б) $21\frac{м}{с}$.

Виконання вправ

1. Точка рухається прямолінійно по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$.

Знайдіть: а) швидкість точки в довільний момент часу t ;

б) швидкість точки в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: а) $6t_0 - 4$; б) $2\frac{м}{с}$.

2. Точка рухається по закону $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ (вільне падіння).

Знайдіть: а) швидкість точки в довільний момент часу t_0;

б) швидкість точки в момент часу $t = 1$ *с*.

Відповідь: а) gt_0; б) $g\frac{м}{с}$.

3. Точка рухається по закону $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ (м) (рівноприскорений рух з початковою швидкістю v_0 та прискоренням а).

Знайдіть швидкість точки: а) в довільний момент часу t_0;

б) в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: а) $v_0 + at_0$; б) $(v_0 + a)\frac{м}{с}$.

4. Величина кута φ повороту точки навколо осі в залежності від часу задано формулою $\varphi(t) = 3t^2 - 2t + 7$ (рад). Виведіть формулу для обчислення миттєвої кутової швидкості x та обчисліть її значення при $t = 1$ с.

Відповідь: $x = 6t - 2$; $4\ \frac{рад}{с}$.

5. При нагріванні тіла його температура змінюється в залежності від часу нагрівання t по закону $T(t) = 0{,}5t^2 + 4t$. Виведіть формулу для обчислення миттєвої швидкості X зміни температури тіла.

Відповідь: $x = t + 4$.

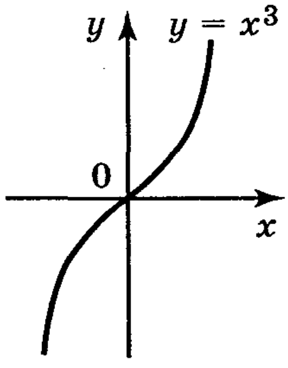

Рис. 21

VII. Сприймання і усвідомлення поняття дотичної до кривої.

В курсі геометрії ви познайомились з означенням дотичної до кола: дотичною до кола називається пряма, яка лежить в площині кола і має з колом лише одну спільну точку. Таке означення дотичної не може бути перенесено на всі криві (парабола, синусоїда, гіпербола тощо).

Наприклад, вісь *OY* має тільки одну спільну точку з графіком функції $y = x^3$, проте її не можна вважати дотичною до кубічної параболи в точці *0* (рис. 21).

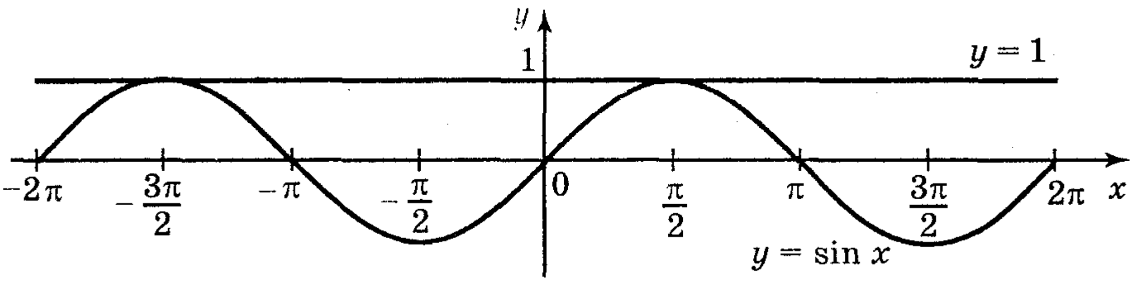

Рис. 22

Пряма $y = 1$ і синусоїда $y = \sin x$ мають безліч спільних точок (рис. 22), проте пряму $y = 1$ вважають дотичною до синусоїди.

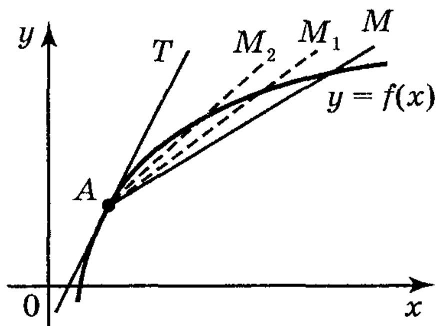

Рис. 23

Для введення означення дотичної до кривої розглянемо функцію $y = f(x)$ і її графік — криву лінію (рис. 23). Нехай точки *A і M* належать графіку функції $y = f(x)$, проведемо січну *AM.*

Зафіксуємо точку А. Нехай точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А. При цьому січна *AM* буде повертатися навколо точки А і в граничному положенні при наближенні точки *M* до точки А січна займе положення прямої АТ. Пряму АТ називають дотичною до даної кривої в точці А.

Дотичною АТ до графіка функції $y = f(x)$ в точці А називається граничне положення січної *AM,* коли точка *M,* рухаючись по кривій, наближається до точки А.

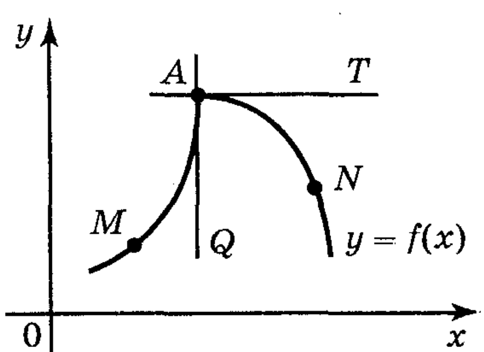

Рис. 24

Слід мати на увазі, що не в усякій точці кривої можна провести до неї дотичну. На рис. 24 зображено криву $y = f(x)$, яка в точці А не має дотичної, бо якщо точка *M* буде наближатися до точки А по лівій частині кривої, то січна МА займе граничне положення AQ.

Якщо точка *N* буде наближатися по правій частині кривої, то січна *NA* займе граничне положення *AT.* Одержуємо дві різні прямі AQ і

AT, це означає, що в точці A до даної кривої дотичної не існує.

Поставимо задачу: провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0; y_0)$.

Дотична — це пряма, а положення прямої $y = kx + b$, яка проходить через точку A($x_0; y_0$) визначається кутовим коефіцієнтом прямої $k = \text{tg}\ \alpha$, де α — кут між прямою і додатнім напрямом осі OX (рис. 25).

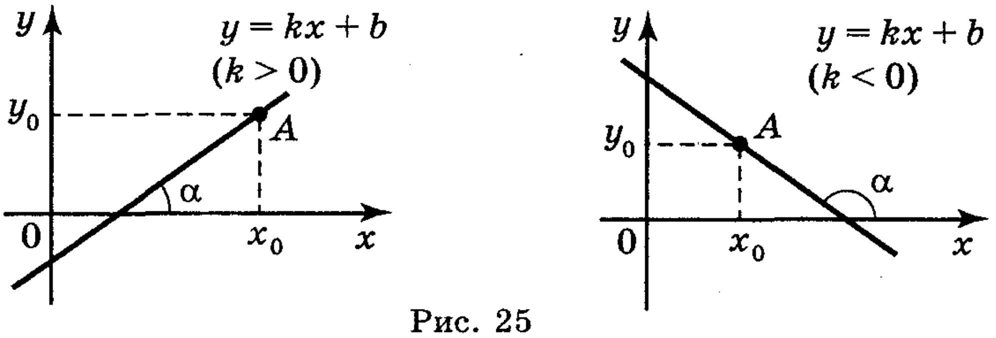

Рис. 25

Отже, провести дотичну до графіка означає знайти число k.

Нехай в точці A($x_0; y_0$) (рис. 26) кривої $y = f(x)$ існує дотична, визначимо кутовий коефіцієнт дотичної. Для цього:

1) Надамо аргументу x_0 приросту Δx, одержимо нове значення аргументу $x_0 + \Delta x$.

2) Знайдемо відповідний приріст функції: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

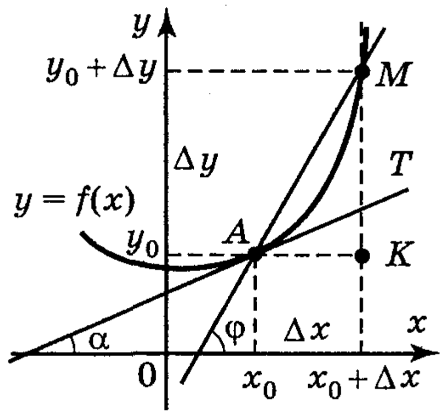

Рис. 26

3) Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Із трикутника AMK маємо: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\angle MAK$. Так як $\angle MAK = \varphi$ — куту нахилу січної AM з додатним напрямом осі OX, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\ \varphi$.

4) Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ і точка M буде переміщуватися по кривій, наближаючись до точки A.

При цьому січна AM буде повертатися навколо точки A, а величина кута φ буде змінюватися зі зміною Δx. Граничним положенням січної AM при $\Delta x \to 0$ буде дотична AT, яка утворює з додатним напрямом осі OX деякий кут, величину якого позначимо через α.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\varphi = k$ — кутовий коефіцієнт дотичної.

Виконання вправ

1. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2 - 4x$ в точці з абсцисою $x = 2{,}5$.

Відповідь: $k = 1$.

2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2 + x$ в довільній точці з абсцисою $x = x_0$.

Відповідь: $2x + 1$.

3. Знайдіть кут між дотичною до параболи $y = x^2 - 2x + 3$ і додатним напрямом осі абсцис у точці:

   а) $x_0 = 1{,}5$; б) $x_0 = 0{,}5$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

Відповіді: а) 45°; б) 135°; в) 0°; г) arctg 2.

Домашнє завдання.

[1 Істер. О. С.] Розділ3 §17, ст.160-164.§18, ст.167-171.§19, ст.174-177.