ЛЕКЦІЯ №5

Тема заняття:. Вимірювання відстаней та кутів у просторі (Кути в просторі, відстані в просторі. Відстань від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами та між паралельними прямими. Відстань між мимобіжними прямими).

Мета заняття: Узагальнити й систематизувати знання, вміння і навички учнів про кути в просторі; розвивати пізнавальну активність, логічне мислення, увагу; виховувати культуру математичного мовлення, упевненість у своїх силах.

Сформувати поняття відстані від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, про властивості точок прямої, паралельної площині, про властивості точок площини, паралельної даній площині. Сформувати поняття спільного перпендикуляра двох мимобіжних прямих, відстані між мимобіжними прямими; сформувати вміння застосовувати ці знання при розв'язуванні задач.

Тип заняття: засвоєння нових знань і вироблення вмінь.

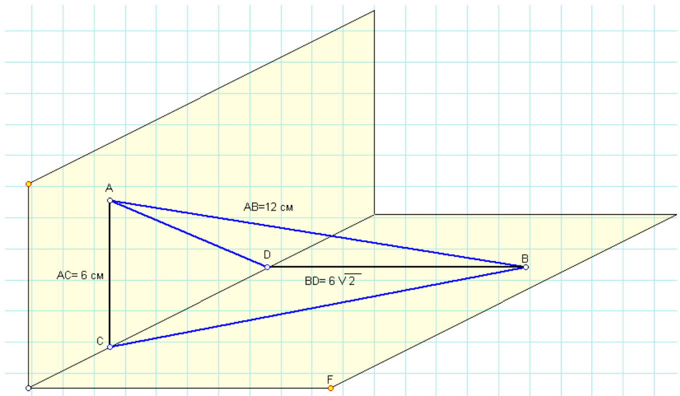
Хід заняття

I. Організаційний етап

II. Перевірка домашнього завдання

Студенти перевіряють правильність виконання домашнього завдання, студенти коментують хід розв'язання задач, використовуючи моделі до задач із «Динамічної геометрії»

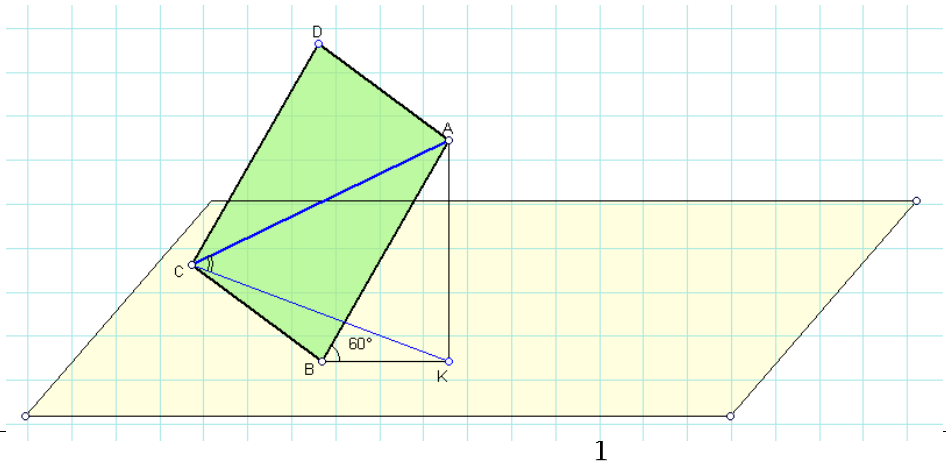
Задача 1. Довжина відрізка дорівнює 12 см. Його кінці належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину цих площин дорівнює 6 см і $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть кути, утворені відрізком зі своїми проекціями на дані площини



Розв'язання

$$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{12} = 0{,}5; \angle ABC = 30^0 \quad , \quad \sin\angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \angle BAD = 45^0$$

Задача 2. Знайдіть кут між діагоналлю квадрата та площиною, проведеною через сторону квадрата під кутом 60^0 до площини квадрата

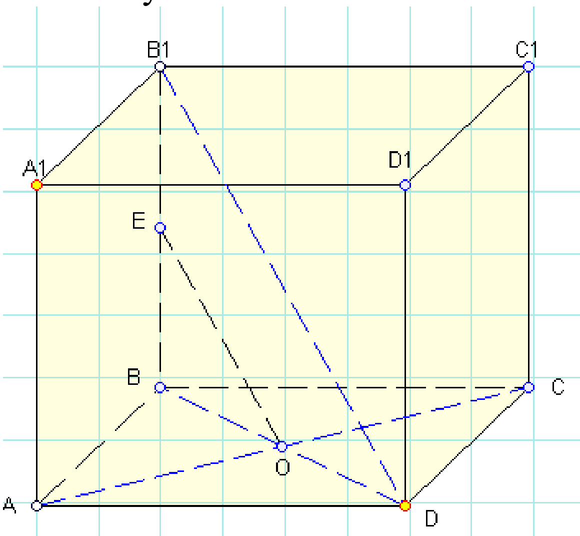


Розв'язання

За умовою задачі кут між площиною квадрата та заданою площиною становить 60^0, тобто $\angle ABK=60^0$. Якщо позначити сторону квадрата через *a*, то

$AK = a\cdot\sin 60^0; AC = a\sqrt{2}$. Отже, $\sin\gamma = \frac{AK}{AC} = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2\cdot a\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{1{,}5}$

Задача 3. Знайдіть кут між діагоналлю куба і мимобіжною з нею діагоналлю основи куба.



Розв'язання

Шуканий кут буде таким же ж, як кут між OE – середньою лінією трикутника DBB_1 та прямою AC, тобто становитиме 90^0, бо використовуючи теорему про три перпендикуляри з умови $BB_1\perp(ABC)$, $BD\perp AC$ маємо, що $EO\perp AC$

ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

розв'язування задачі № 32.

Р о з в ' я з а н н я

Спроектуємо ортогональне прямі *a*, *b*, *c* на площину, яка паралельна їм, одержимо прямі a_1, b_1, c_1 відповідно, які попарно перетинаються і паралельні прямим *a*, *b*, *c*. Можливі два випадки (рис. 279).

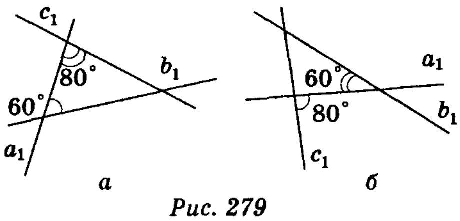


Рис. 279

У випадку «*а*» маємо: кут між прямими b_1 і c_1 дорівнює 180° – 60° – 80° = 40°.

У випадку «*б*» маємо: кут між прямими b_1 і c_1 дорівнює 180° – (180° – 80°) – 60° = 20°.

А через те що $b \parallel b_1$, $c \parallel c_1$, кут між прямими b і c може дорівнювати або 40° , або 20°.

Відповідь. 20° або 40° .

3. Розв'язування задач.

1) Грані SAB і SAC тетраедра SABC (рис. 280) — прямокутні трикутники з прямим кутом з вершиною в точці А. Доведіть, що ребра BC і AS взаємно перпендикулярні.

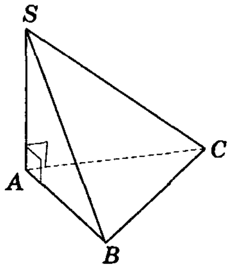


Рис. 280

2) Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що площина, яка проходить через точки A, B_1, D_1, перпендикулярна до діагоналі A_1C .

ІІ. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Кут між прямою і площиною

У курсі геометрії 10 класу ми розглянули випадки розміщення прямої і площини: 1) пряма лежить у площині; 2) пряма паралельна площині; 3) пряма перпендикулярна до площини. Залишається дослідити випадок, коли пряма перетинає площину, але не перпендикулярна до неї.

Такі прямі можуть бути нахилені до площини під різними кутами. Що ж розуміють під кутом між прямою і площиною?

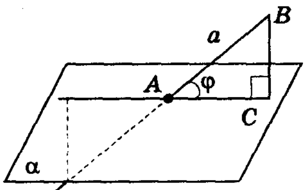


Рис. 281

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між прямою і площиною дорівнює 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними дорівнює 90°. У решті випадків кутом між прямою і площиною називають кут між прямою і її проекцією (ортогональною) на площину. На рис. 281 $BC \perp \alpha$, A — точка перетину прямої a з площиною α , тоді кут між прямою a і площиною α дорівнює куту $BAC = \varphi$. Якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \le \varphi \le 90°$.

Розв'язування задач

1. Задача № 35 із підручника (с. 56).

2. Дано зображення куба. Знайдіть кут між площиною ABC і прямою a (рис. 282).

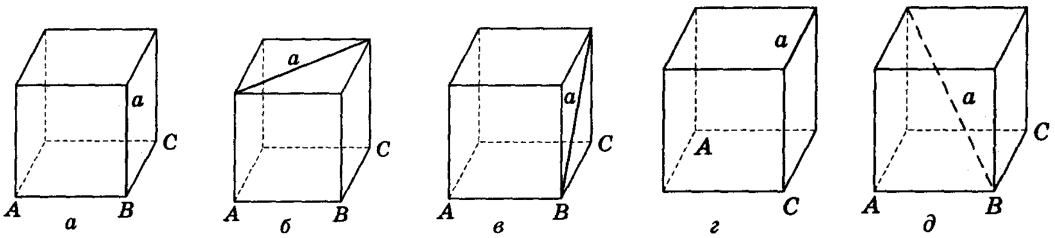


Рис. 282

(Відповідь, а) 90° ; б) 0°; в) 45° ; г) 45° ; д) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$).

3. Задача № 37 із підручника (с. 57).
4. Задача № 39 із підручника (с. 57).
5. Задача № 41 із підручника (с. 57).
6. Задача № 34 із підручника (с. 56).

III. Формулювання теми, мети і завдань заняття. Мотивація навчальної діяльності.

Поряд з поняттям кута надзвичайно важливим є поняття відстані в просторі : між точками, прямими, площинами, геометричними множинами точок, тілами.

IV.Формування знань

Використовуючи листок-трафарет (Додаток 1) та супроводжуючу завдання презентацію, учні виконують практичні завдання та повторюють основні поняття по знаходженню відстаней

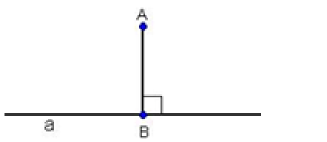
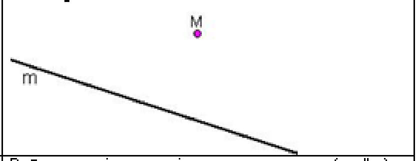
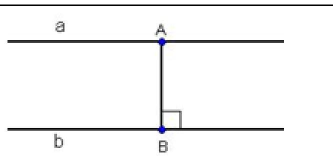
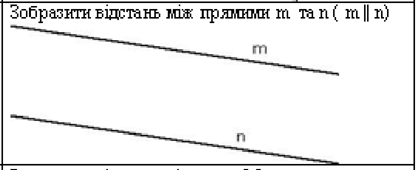
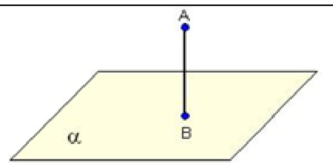
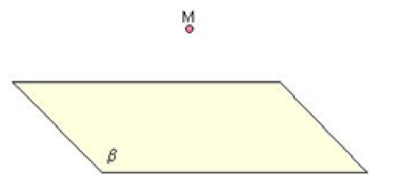
- між двома точками
- від точки до прямої
- між паралельними прямими
- від точки до площини

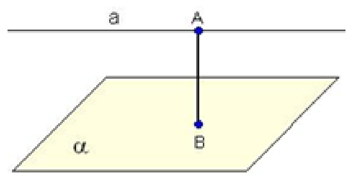
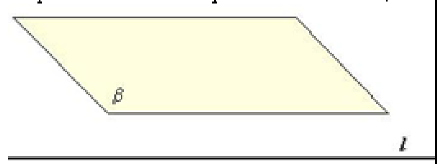
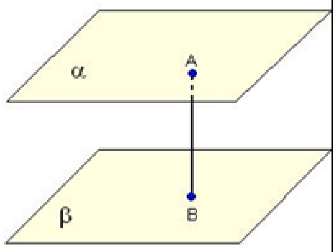
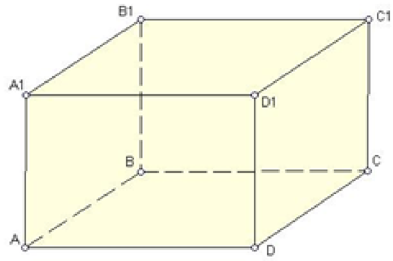
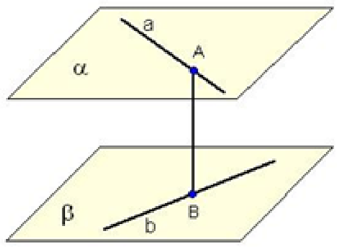
Таким чином йде підготовка до вивчення нового матеріалу на основі узагальнення і повторення вивченого раніше.

Після цього йде введення нових понять: означення та знаходження відстаней

- від прямої до паралельної їй площини
- між паралельними площинами
- між мимобіжними прямими

Таблиця «Відстані в просторі»

Види відстаней	Зображення	Символічний запис	Завдання для самостійної роботи
Між двома точками		$\rho(A;B)=AB$ ______ $\rho(M;N)=$ $\rho(F;N)=$	Зобразити відстань між точками M та N, F та P 
Від точки до прямої		$AB \perp a$, $\rho(A;a)=AB$ ______ $\rho(M;m)=$	Зобразити відрізок, який є відстанню від точки M до прямої m 
Між паралельними прямими		$a \parallel b$, $A \in a$, $AB \perp b$, $B \in b$, $\rho(a,b)=AB$ ______ $\rho(m,n)=$	Зобразити відстань між прямими m та n ($m \parallel n$) 
Від точки до площини		$AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $\rho(A,\alpha)=AB$ ______ $\rho(M,\beta)=$	Зобразити відстань від точки M до площини β 

Від прямої до паралельної їй площини		$a \parallel \alpha$, $A\in a$, $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$, $\rho(a, \alpha) = AB$ $\rho(l, \beta) =$	Зобразити відстань від прямої l до площини β 
Між паралельними площинами		$\alpha \parallel \beta$, $A\in \alpha$, $B \in \beta$, $AB \perp \alpha$, $\rho(\alpha, \beta) = AB$ $\rho(ABC, A_1B_1C_1) =$ $\rho(AA_1B_1, DD_1C_1) =$	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Вказати відстані між площинами: ABC і $A_1B_1C_1$; AA_1B_1 і DD_1C_1 
Між мимобіжними прямими		a, b – мимобіжні, $A\in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB \perp b$, $\rho(a, b) = AB$ $\rho(AA_1, DC) =$ $\rho(BC, DD_1) =$	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. малюнок вище). Вказати відстані між прямими : AA_1 і DC; B_1C_1 і DD_1

В ході пояснення виконуються практичні завдання (див. таблицю 1)

Учні записують в зошит формулювання нових теорем (теореми 2, 3 та 4)

Теорема 2 (про відстань між паралельними прямою і площиною)

Відстань між паралельними прямою і площиною дорівнює довжині спільного перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки прямої на площину

$$AB\perp \alpha,\quad B\alpha\in,\quad \rho(A;\alpha)=AB$$

Теорема 3 (про відстань між паралельними площинами)

Відстань між паралельними площинами дорівнює довжині спільного перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини на другу

$$\alpha\parallel\beta,\ \alpha\in A,\ B\beta\in,\ AB\perp \alpha,\quad \rho(\alpha,\beta)=AB$$

Теорема 4

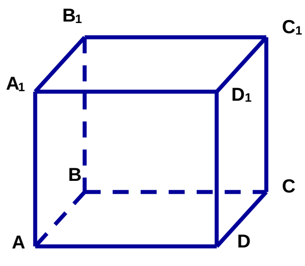
Дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один. Він є спільним перпендикуляром до паралельних площин, які проходять через ці прямі.

a, b – мимобіжні, $\in A\ a,\ B\in b,\ AB\perp a,\ AB\perp b,\quad \rho(a, b)=AB$

V. Ознайомлення із способами знаходження відстані між мимобіжними прямими

<u>Спосіб 1. *Знаходження спільного перпендикуляра*</u>

В ході розв'язання відшукують або будують спільний перпендикуляр до даних мимобіжних прямих і обчислюють його довжину



Задача 1. Ребро куба дорівнює *a.* Знайти відстань між прямими BC і DD_1

(відрізок CD довжиною *a*)

Задача 2. Ребро куба дорівнює *a.* Знайти відстань між прямими AA_1 і CB_1

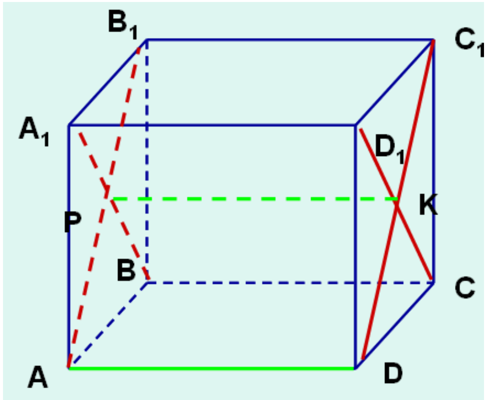
(відрізок A_1B_1 довжиною *a*)

Спосіб 2. *Побудова паралельних площин*

В ході розв'язання проводять через дані мимобіжні прямі паралельні площини α і β; тоді шукана відстань дорівнює відстані між цими площинами

Задача 3. Ребро куба дорівнює *a*. Знайти відстань між діагоналями несуміжних граней - прямими A_1B і DC_1

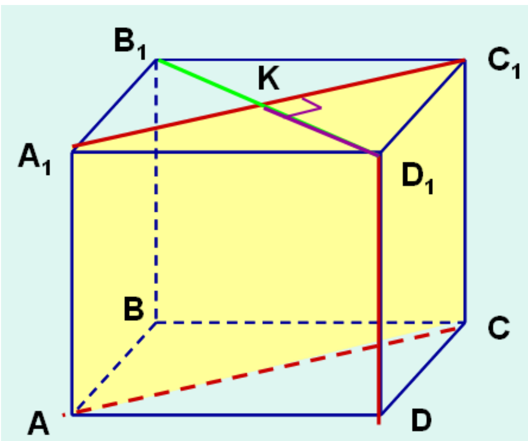
(відрізок PK, що сполучає центри граней AA_1B_1 та CC_1D довжиною *a*)



Спосіб 3. *Побудова однієї паралельної площини*

В ході розв'язання проводять через одну з даних мимобіжних прямих b площину β, паралельну другій прямій a; тоді шукана відстань дорівнює відстані між прямою a і паралельною їх площиною β

Задача 4. Ребро куба дорівнює *a*. Знайти відстань між діагоналлю основи та несуміжним до неї бічним ребром - прямими A_1C_1 і DD_1



Розв'язання

Проведемо через діагональ A_1C1 верхньої грані куба площину, паралельну до бічного ребра DD_1- площину AA_1C.

$AA_1 \subset (AA_1C)$, $AA_1 \parallel DD_1$, тому $DD_1 \parallel (AA_1C)$

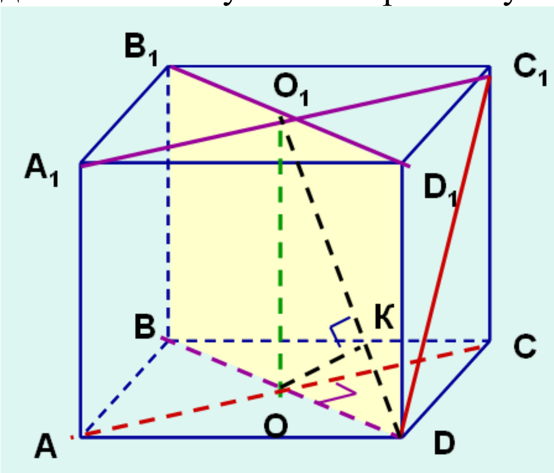
Так як діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні ($A_1C_1 \perp B_1D_1$) а також взаємно перпендикулярні основи та побудована діагональна площина, то KD_1 – шуканий перпендикуляр і шукана відстань, де K – точка перетину діагоналей основи

$\rho(A_1C_1, DD_1)=KD_1=a\sin 45^0 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

Спосіб 4. *Побудова перпендикулярної площини*

Проводять площину β, перпендикулярну до однієї з даних прямих а; і ортогонально проектують обидві дані прямі на цю площину; тоді проекцією прямої а є точка А перетину цієї прямої з площиною β, проекцією прямої b – деяка пряма b_1 площини β, а шукана відстань дорівнює відстані від точки А до прямої b_1

Задача 5. Ребро куба дорівнює *a*. Знайти відстань між мимобіжними діагоналями суміжних граней куба - прямими АС і DC_1



Розв'язання

Використаємо перпендикулярність діагоналей квадратів основ куба

Проведемо через діагональ BD площину, перпендикулярну до діагоналі AC, - площину BB_1D. Ортогональними проекціями на неї прямих AC та DC_1 будуть точка O (перетин AC і BD) та пряма DO_1

Опустимо перпендикуляр OK з точки O на пряму O_1D OK – шукана відстань

Так як $OK \cdot O_1D = OO_1 \cdot OD$, маємо

$$OO_1 = a, BD = a\sqrt{2}, OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$O_1D = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\sqrt{1,5}$$

$$OK = \frac{OO_1 \cdot OD}{O_1D} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{1,5} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

VI. Підбиття підсумків заняття.

1) Дайте означення кута між прямою і площиною.

2) У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз січною площиною, яка проходить через точки A_1, *D, C* (рис. 283). Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

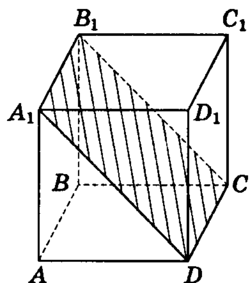


Рис. 283

а) площина A_1DB_1 перпендикулярна до прямої AA_1;

б) кут між прямою *AD* і площиною A_1DC, дорівнює 45° ;

в) кут між прямою *AB* і січною площиною дорівнює 0°;

г) кут між прямою BC_1 і площиною A_1DC дорівнює 90° .

V. Домашнє завдання.