

ЛЕКЦІЯ №4

Тема заняття: Перпендикулярність площин. Ортогональне проектування. Двогранний кут.

Хід заняття

Самостійна робота.

Варіант 1

Периметр правильного трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$ см, а відстані від деякої точки до кожної із сторін трикутника — 10 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

Варіант 2

Площа правильного трикутника дорівнює $108\sqrt{3}$ см². Точка віддалена від площини трикутника на 8 см і рівновіддалена від його сторін. Знайти відстані від цієї точки до сторін трикутника.

Варіант 3

Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15 см. Точка простору віддалена від кожної сторони цього трикутника на 5 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

Варіант 4

Сторони трикутника дорівнюють 36, 25 і 29 см. Відстань від деякої точки до площини трикутника дорівнює 15 см. Відстані від цієї точки до сторін трикутника рівні. Знайдіть ці відстані.

Відповідь. Варіант 1. 8 см. Варіант 2. 10 см. Варіант 3. 3 см. Варіант 4. 17 см.

II. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Поняття перпендикулярних площин

Дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо третя площина, проведена перпендикулярно до лінії перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих. На рис. 216 $\alpha \perp \beta$, бо площини α і β перетинаються по прямої c , площина γ , перпендикулярна до c , перетинає α і β по прямих a і b , які перпендикулярні.

Означення перпендикулярності площин не залежить від вибору площини γ . Дійсно, візьмемо іншу площину γ_1 , перпендикулярну до прямої c (рис. 217).

Оскільки $c \perp \gamma$ та прями a і b лежать у площині γ і перетинаються в точці A , то $c \perp a$, $c \perp b$ (за означенням перпендикулярності прямої і площини).

Аналогічно $c \perp a_1$, $c \perp b_1$. Крім того, a і a_1 , b і b_1 лежать відповідно в площинах α і β . Отже, $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Оскільки $a \perp b$, $a \parallel a_1$ і

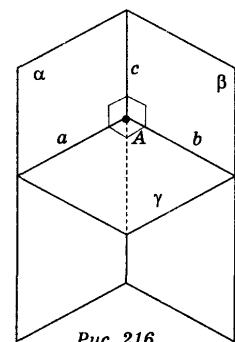


Рис. 216

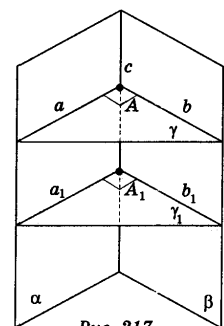


Рис. 217

$b \parallel b_1$, то $a_1 \perp b_1$ (теорема 3.1).

Розв'язування задач

1. Наведіть приклади моделей перпендикулярних площин із оточення.
2. Покажіть на моделі прямокутного паралелепіпеда перпендикулярні грані (площини).
3. Дано зображення куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть площини, які перпендикулярні до площини:
а) ABC ; б) ADC_1 ; в) ACC_1 .
4. На двох перпендикулярних площинах вибрали по прямій. Чи може статися, що ці прямі:
а) паралельні; б) перетинаються; в) мимобіжні?

Відповідь проілюструйте прикладами з оточення.

5. Задача № 59 (1, 3, 5) із підручника (с. 39).

Ознака перпендикулярності площин

Доведення ознаки перпендикулярності двох площин провести, як це зроблено в підручнику (§ 3, п. 20, теорема 3.6).

Подамо зразок запису теореми 3.6 на дошці і в конспектах.

Теорема.

Д а н о : $a, b, b \perp \alpha, \beta, b \subset \beta$.

Д о в е с т и : $\alpha \perp \beta$ (рис. 218).

Д о в е д е н н я

Нехай α і β перетинаються по прямій c , а пряма c перетинається з b в точці A . Через точку A в площині α проведемо пряму a , $a \perp c$. Через a і b проведемо площину γ , $c \perp a$, $c \perp b$, отже, $\gamma \perp c$. Оскільки $a \perp b$, то $\alpha \perp \beta$.

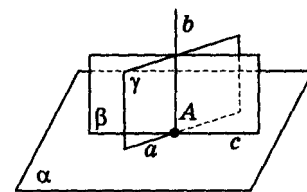


Рис. 218

Розв'язування задач,

1. Як на практиці встановити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?
2. $ABCD$ — квадрат, $MD \perp (ABC)$ (рис. 219). Доведіть, що:
а) $(MAD) \perp (MCD)$; б) $(MBC) \perp (MCD)$.
3. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$; $PB \perp (ABC)$ (рис. 220). Доведіть, що $(PAC) \perp (PBC)$.
4. Чи правильні твердження:

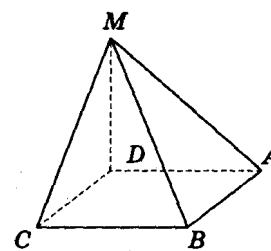


Рис. 219

- а) через точку, взяту поза площиною, можна провести площину, перпендикулярну до цієї площини, і притому тільки одну;
- б) якщо площина перпендикулярна до даної площини, то вона перпендикулярна і до довільної прямої, паралельної цій площині?

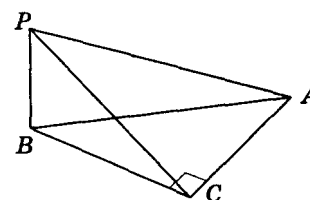


Рис. 220

Ортогональне проектування

З а п и т а н н я д о г р у п и

- 1) Як задається паралельна проекція?
- 2) Що називається паралельною проекцією точки?
- 3) Як побудувати паралельну проекцію фігури?
- 4) Що є паралельною проекцією прямої?

5) Чи зберігаються при паралельному проектуванні довжина відрізків, величина кутів?

6) Які властивості паралельного проектування вам відомі? Сформулюйте їх.

Якщо проектуючі прямі перпендикулярні до площини проєкцій, таке проектування називають **ортогональним**, або **прямокутним**. Ортогональне проектування — вид паралельного проектування, тому воно має властивості паралельного проектування. У геометрії ортогональне проектування основне. Далі, говорячи про проектування і проєкції, ми матимемо на увазі тільки ортогональне проектування, ортогональні проєкції.

Ортогональне проектування широко застосовується в технічному кресленні.

Р о з в ' я з у в а н н я з а д а ч

1. Знайдіть ортогональні проєкції діагоналі BD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на грані:

- 1) $ABCD$; 2) $A_1 B_1 C_1 D_1$; 3) $DD_1 C_1 C$; 4) $ADD_1 A_1$.

Поняття двогранного кута та його елементів, лінійного кута двогранного кута

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує. Півплощини називаються **гранями**, а пряма, що їх обмежує – **ребром** двогранного кута.

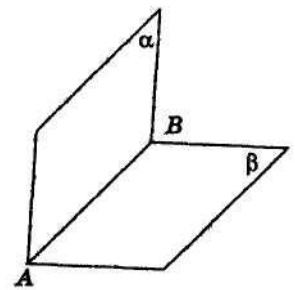


Рис. 1

На рис. 1 зображено двогранний кут з ребром AB та гранями α і β .

Лінійним кутом двогранного кута називається кут, утворений в результаті перетину двогранного кута з площиною, яка перпендикулярна до ребра двогранного кута.

На рис. 2 площина $\gamma \perp c$, φ – лінійний кут двогранного кута.

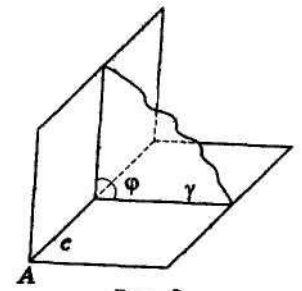


Рис. 2

Мірою двогранного кута називається міра відповідного йому лінійного кута.

Для даного двогранного кута можна побудувати безліч лінійних кутів, проте всі лінійні кути двогранного кута суміщаються в результаті паралельного перенесення, а отже, вони рівні. Тому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Якщо φ – лінійний кут двогранного кута, то $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$.

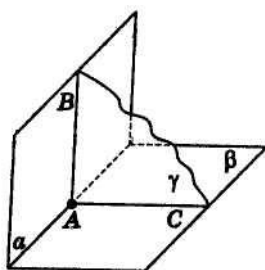


Рис. 7

Способи побудови лінійного кута двогранного кута

Доцільно розглянути наступні задачі на доведення.

Задача 1

На ребрі двогранного кута вибрана точка і через неї в гранях двогранного кута проведено два промені, перпендикулярні до ребра. Доведіть, що кут утворений цими променями, буде лінійним кутом двогранного кута.

Розв'язання

Нехай на ребрі двогранного кута вибрано точку A , $A \in \alpha$ (рис. 7) і проведено промені AC і AB , $AB \subset \alpha$, $AC \subset \beta$, $AB \perp a$, $AC \perp a$. Промені AB і AC визначають площину γ , яка буде перпендикулярна до ребра a (згідно з ознакою перпендикулярності прямої і площини), тому $\angle BAC$ – лінійний кут двогранного кута з ребром a і гранями α і β .

Задача 2

В одній із граней двогранного кута вибрано точку A і з неї опущено перпендикуляр AB до площини другої грані і перпендикуляр AC на ребро кута. Доведіть, що кут ACB (або суміжний з ним) буде лінійним кутом двогранного кута.

Розв'язання

Враховуючи, що $AB \perp \alpha$ (рис. 8), $AC \perp a$, то, згідно з теоремою про три перпендикуляри, $BC \perp a$.

Оскільки $AC \perp a$, $BC \perp a$, то площина γ , яка визначається прямими AC і BC , які перетинаються, буде перпендикулярна до ребра a двогранного кута, і тому $\angle ACB$ (або суміжний з ним) буде лінійним кутом двогранного кута з ребром a та гранями α і β .

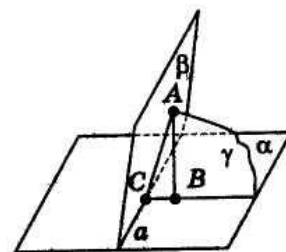


Рис. 8

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

- 1) Які площини називаються перпендикулярними?
- 2) Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.
- 3) Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Враховуючи, що ребра куба, які виходять з однієї вершини, попарно перпендикулярні, укажіть серед наведених тверджень правильні:
 - а) площини $AD_1 C$ і $AD_1 D$ перпендикулярні;
 - б) площини $AD_1 C$ і CDD_1 перпендикулярні;
 - в) площини $AD_1 C$ і ADC перпендикулярні;
 - г) площини ADD_1 і ADC перпендикулярні.
- 4) Дано дві перпендикулярні площини α і β та пряму c , яка перпендикулярна до площини α . Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
 - а) пряма c обов'язково належить площині β ;
 - б) пряма c може бути паралельною площині β ;
 - в) якщо пряма c , належить площині β , то вона паралельна лінії перетину площин α і β ;
 - г) будь-яка площина, яка містить пряму c , перпендикулярна до площини α .

- 5) Що розуміють під ортогональною проекцією фігури на площину?
- 6) Перелічіть властивості ортогонального проектування.
- 7) Дано зображення куба (рис. 234). Знайдіть ортогональні проекції відрізка BL на площину: а) ABC ; б) DLC ; в) MNK ; г) ADL ; к) ABM ; е) BCK .
- 8) Що таке двогранний кут (грань кута, ребро кута)?
- 9) Дайте означення лінійного кута двогранного кута.
- 10) Чому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута?
- 11) Які прийоми побудови лінійного кута двогранного кута вам відомі?
- 12) Чому дорівнює в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ двогранний кут, утворений:
 а) основою $ABCD$ і перерізом A_1B_1CD ,
 б) гранню CC_1D_1D і перерізом AA_1C_1C ? (Відповідь, а) 45° ; б) 45° .)

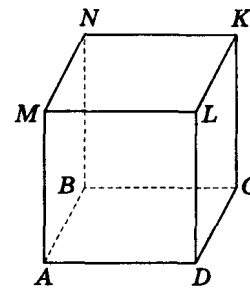


Рис. 234