ЛЕКЦІЯ № 3

Тема заняття: Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри.

Мета заняття: формування понять: перпендикуляр до площини, похила, основа похилої, основа перпендикуляра, проекції похилої на площину, відстань від точки до площини. Виявлення взаємозв'язку між довжинами двох похилих, проведених з однієї точки до площини, і довжинами їх проекцій.

Обладнання: стереометричний набір.

Хід заняття

I. Перевірка домашнього завдання

1. Два студенти відтворюють на дошці розв'язання домашніх задач.

2. Розв'язування задач.

1) Дано площину α, перпендикулярну до неї пряму a і іншу пряму b, яка не лежить в площині α. Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
   а) якщо $b \parallel a$, то $b \perp \alpha$;
   б) якщо $b \perp \alpha$, то $b \parallel a$;
   в) якщо $b \perp \alpha$, то a і b мимобіжні;
   г) якщо $b \perp \alpha$, то a і b перетинаються.
2) Дано площину α, паралельну їй пряму a і деяку пряму b, яка не лежить в площині α. Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
   а) якщо $b \parallel a$, то обов'язково $b \parallel \alpha$;
   б) якщо $b \perp \alpha$, то обов'язково $b \perp a$;
   в) якщо $b \perp \alpha$ і b перетинає a, то $b \perp a$;
   г) якщо $b \perp \alpha$, то b і a обов'язково мимобіжні.

II. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

1. Перпендикуляр і похилі, взаємозв'язок між довжинами похилих. проведених з однієї точки, і довжинами їх проекцій

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною.

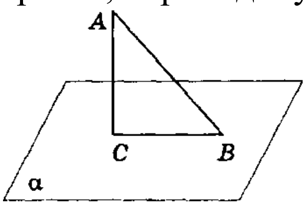


Рис. 162

На рис. 162 пряма AC перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці C, отже, відрізок AC — перпендикуляр, опущений з точки A на площину α. Кінець цього відрізка, який лежить у площині, тобто точка C, називається ***основою перпендикуляра.***

Якщо AC — перпендикуляр до площини α, а точка B — відмінна від C точка цієї площини, то відрізок AB називають ***похилою,*** проведеною з точки A на площину α. Точка B — ***основа похилої.*** Відрізок, що з'єднує основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається ***проекцією похилої.*** На рис. 162 відрізок BC — проекція похилої AB на площину α.

Прикладами матеріальних моделей перпендикулярів є: стовпи, телевізійні вежі тощо.

Розв'язування задач

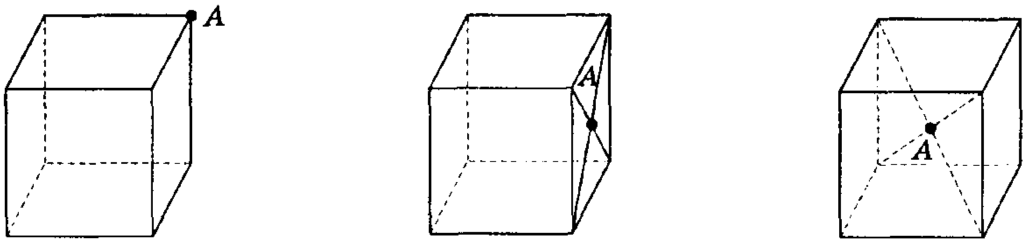
1. Знайти довжину похилої, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 4 см, а проекція похилої на площину — 3 см.
2. Знайти проекцію похилої на площину, якщо похила дорівнює 13 см, а перпендикуляр, проведений з тієї ж точки,— 12 см.
3. Знайти довжину перпендикуляра, якщо похила дорівнює 10 см, а її проекція на площину — 8 см.
4. Скільки перпендикулярів можна опустити з даної точки до даної площини? Чому?
5. Скільки похилих можна провести з даної точки до даної площини?
6. Як слід установити на хрестовині ялинку, щоб вона була перпендикулярна до площини підлоги?
7. Як на практиці за допомогою виска перевірити вертикальність встановленого стовпа?

Слід зазначити, що перпендикуляр, опущений з точки, коротший за будь-яку похилу, проведену через дану точку.

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Розв'язування задач

1. Знайти відстань від точки A до граней куба, якщо ребро куба дорівнює 10 см (рис. 163).



а *б* *в*

Рис. 163

2. Із точки S проведено до площини a перпендикуляр SO та похилі SA і SB. Довжини похилих відповідно дорівнюють 13 і 20 см. Довжина проекції похилої AS дорівнює 5 см (рис. 164). Знайти відстань від точки S до площини та довжину проекції похилої SB.

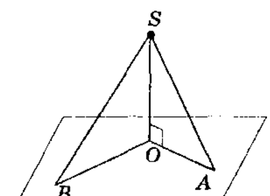


Рис. 164

Вивчення взаємозв'язку між довжинами похилих, проведених з однієї точки, і довжинами їх проекції доречно провести шляхом розв'язування задач.

Задача.

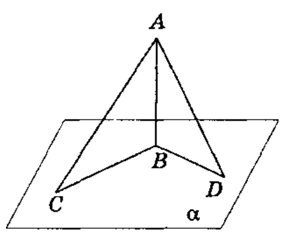


Рис. 165

Із деякої точки проведено до площини дві похилі і перпендикуляр. Доведіть, що якщо:

1) похилі рівні, то рівні і їх проекції;

2) проекції похилих рівні, то рівні і похилі.

3) похилі нерівні, то більша похила має більшу проекцію.

Д о в е д е н н я

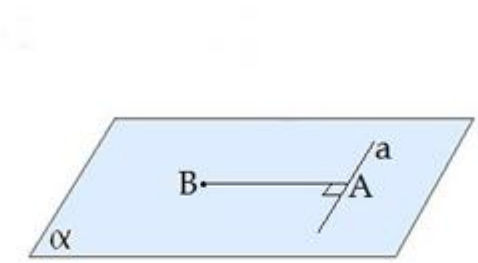
Нехай $AB \perp \alpha$ (рис. 165); AC і AD — похилі; AC > BD .

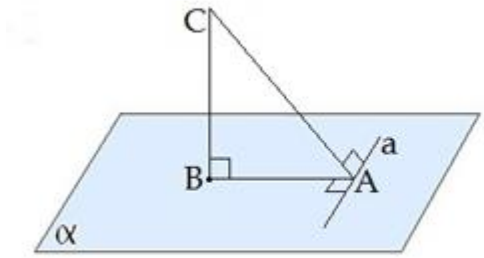
Із ΔACB AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$.
Із ΔADB AD = $\sqrt{AB^2 + BD^2}$.
Згідно з умовою AC > *AD* , тоді
$\sqrt{AB^2 + BC^2} > \sqrt{AB^2 + BD^2}$;

$AB^2 + BC^2 > AB^2 + BD^2$, або $BC^2 > BD^2$; отже, $BC > BD$. 4) Доведіть: якщо похилі нерівні, то більшій проекції відповідає більша похила.

Формулюємо й доводимо теорему про три перпендикуляри. Наводимо зразок запису на дошці і в конспектах студентів.

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна її проекції, то вона перпендикулярна й самій похилій.



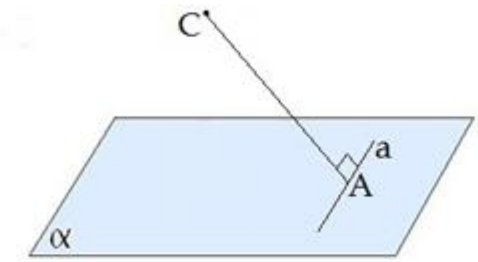


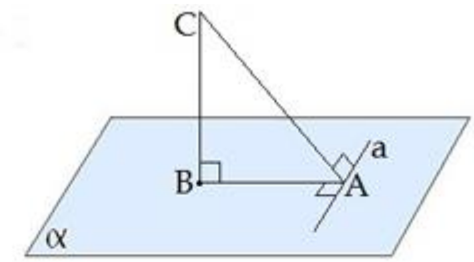
a⊥AB

a⊥AB
BC⊥BA} ⇒ a⊥CA

<u>Справедлива також зворотня теорема:</u>

Якщо пряма на площині перпендикулярна похилій, то вона перпендикулярна і проекції похилої.





a⊥AC

a⊥AC
BC⊥BA}⇒a⊥BA

Розв'язування задач

1. Дано: DB $\perp$ (ABC), <BAC = 30°, <ABC = 60° (рис. 195). Довести: $CD \perp AC$.

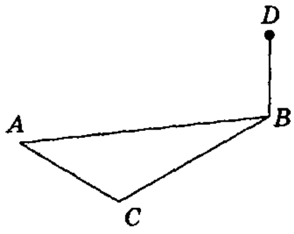


Рис. 195

2. Дано: DA $\perp$ (ABC), <BAC = 40°, <ACB = 50° (рис. 196). Довести: CB $\perp$ *BD*.

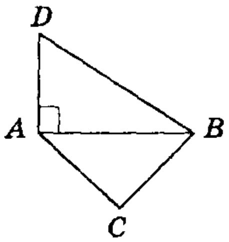
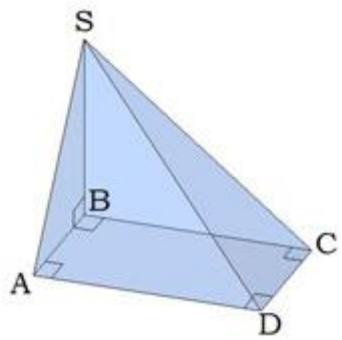


Рис. 196

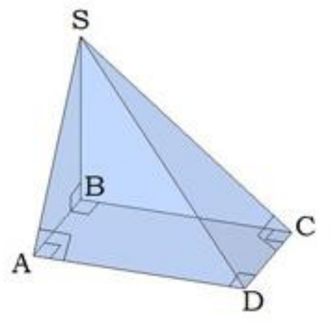
3. Із вершини B до площини квадрата ABCD проведено перпендикуляр BS і похилі SA, SC і SD.
Назви всі прямокутні трикутники з вершиною S, обґрунтуй свою відповідь.

Малюнок:



ABCD квадрат, всі кути якого дорівнюють 90° градусів.

1. Грань ASB — прямокутний трикутник,
2. Грань BSC — прямокутний трикутник,
тому що BS — перпендикуляр до площини.



3. Грань DSC — прямокутний трикутник, за теоремою про три перпендикуляри:
 $CD \perp BC$,тому що$ABCD -$квадрат.$SB \perp BC$,тому щоперпендикуляр$\} \Rightarrow CD \perp SC$
отже, $\angle SDC = 90°$

4. Грань ASD — прямокутний трикутник, за теоремою про три перпендикуляри:
 $AD \perp AB$,тому що$ABCD -$квадрат$SB \perp AB$,тому щоперпендикуляр$\} \Rightarrow AD \perp SA$
отже, $\angle$ SAD= 90°.

4. До площини квадрата *ABCD* проведено перпендикуляр SB. Точка S сполучена з вершинами квадрата. Визначте вид трикутника SAD.

Розв'язування задач

1. <*ABC* = 90°; MA = *MB* = *MC* (рис. 169). Опустіть з точки M перпендикуляр на площину ABC.

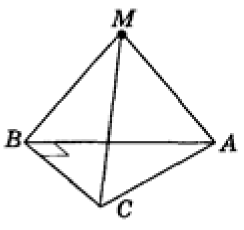


Рис. 169

2. *ABCD* — квадрат, AB = $4\sqrt{2}$ см, MA = MB = MC = MD = 5 см (рис. 170). Знайдіть відстань від точки *M* до площини ABC.

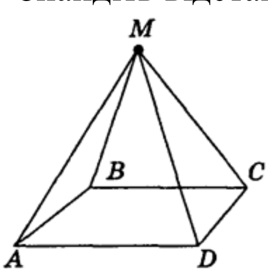


Рис. 170

3. AB = BC = AC = $5\sqrt{3}$ см; MA = MB = MC = 13 см (рис. 171). Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

4. $ABCD$ — квадрат, SO $\perp$ (ABC), SO = $2\sqrt{2}$ см, AB = 4 см (рис. 172). Знайдіть відстань від точки S до вершин квадрата.

5. ΔABC – правильний; точка O – центр трикутника; AB = $3\sqrt{3}$ см; SO $\perp$ (ABC); SO = $\sqrt{3}$ см (рис. 173). Знайдіть відстань від точки 5 до вершин трикутника ABC.

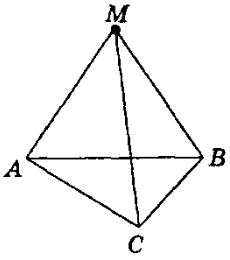


Рис. 171

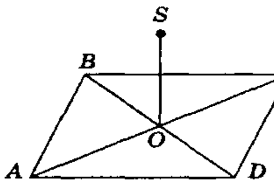


Рис. 172

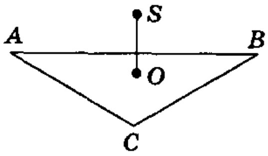


Рис. 173

IV. Домашнє завдання

§ 10 [4 - Нелін], № 10.5, 10.6, 10.9(2) ст.250.

§ 5, п.35 [3 - Мерзляк]; № 35.4; 35.6, 35.13, 35.19, 35.24, 35.28 (с. 185).

V. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Що таке перпендикуляр, опущений з даної точки до площини?
2) Що таке похила, проведена з даної точки до площини?
3) Скільки перпендикулярів та похилих можна побудувати з даної точки до площини?
4) З даної точки до площини проведено дві похилі. Що можна стверджувати про проекції похилих на площину, якщо похилі:

а) рівні; б) не рівні?

5) Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.

2) Які теореми та означення використовуються для доведення теореми про три перпендикуляри?

6) Укажіть взаємне розташування прямих a і b (рис. 198).

а) ABCD — квадрат, SB $\perp$ (ABC); б) ABCD — ромб, SB $\perp$ (ABC).

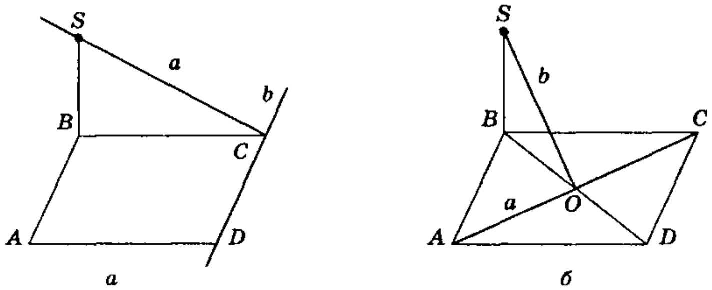


Рис. 198