ЛЕКЦІЯ № 2

Тема заняття: Перпендикулярність прямої і площини.

Мета заняття: формування поняття прямої, перпендикулярної до площини. Вивчення ознаки перпендикулярності прямої і площини. формування знань студентів про властивості перпендикулярних прямих і площин.

Обладнання: стереометричний набір, модель куба.

Хід заняття

I. Перевірка домашнього завдання

1. Відповіді на запитання, які виникли в студентів при виконанні домашнього завдання.

II. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Означення перпендикулярності прямої і площини

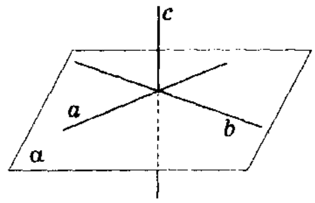

Рис. 137

Уявлення про пряму перпендикулярну до площини дають вертикально поставлені стовпи — вони перпендикулярні до поверхні землі, перпендикулярні до будь-якої прямої, яка проходить через основу стовпа і лежить у площині землі.

Пряма називається ***перпендикулярною до площини,*** якщо вона перетинає цю площину та перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину.

На рис. 137 пряма c перпендикулярна до площини α. Пишуть: c ⊥ α. З означення випливає, що $c \perp a$, $c \perp b$.

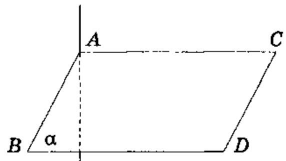

Рис. 138

Розв'язування задач

1. Укажіть в оточуючому просторі моделі прямих і площин, які перпендикулярні.
2. Чи правильно, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна ні до жодної прямої, яка лежить в цій площині?
3. Що означає твердження: пряма не перпендикулярна до площини?
4. Пряма SA перпендикулярна до площини прямокутника ABCD. Укажіть перпендикулярні прямі (рис. 138).

(*Відповідь.* SA ⊥ AB; SA ⊥ AC ; SA ⊥ AD.)

Ознака перпендикулярності прямої і площини

Як перевірити, чи перпендикулярна дана пряма до даної площини? Це питання має практичне значення, наприклад, при установці щогл, колон тощо, які потрібно поставити прямо, тобто перпендикулярно до площини землі. Насправді немає необхідності перевіряти перпендикулярність прямої до всіх прямих, що лежать у даній площині й проходять через точку перетину даної прямої і площини, а досить перевірити перпендикулярність лише до двох прямих, які лежать у площині і проходять через точку перетину прямої і площини. Це випливає з теореми, що виражає ознаку перпендикулярності прямої і площини.

Теорема.
Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині й перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Далі колективно розбирається доведення сформульованої теореми за заготовленим рисунком і умовою теореми.

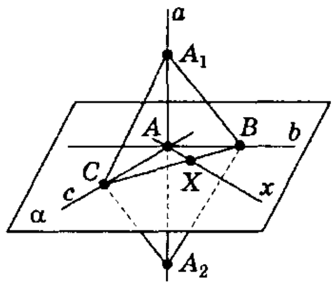

Рис. 139

Наводимо запис, що робиться на дошці і в зошитах учнів.

Д а н о :
$a \perp c$, $a \perp b$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$; *a, b, c* перетинаються в точці А; $x \subset \alpha$.
Д о в е с т и : $a \perp x$ (рис. 139).
Д о в е д е н н я

Додаткові побудови: проводимо пряму в площині α, яка перетинає прямі *b, x, c* в точках B, X, C, та відкладаємо на прямій *a* $AA_1 = AA_2$.

Номер п/п	Твердження	Аргументи
1	ΔA_1CA_2 — рівнобедрений	AC — висота за умовою та медіана за побудовою
2	ΔA_1BA_2 — рівнобедрений	AB — висота за умовою та медіана за побудовою
3	$\Delta A_1CB = \Delta A_2CB$	За третьою ознакою рівності трикутників ($A_1B = A_2B$ із п.2; $A_1C = A_2C$ із п.1; CB — спільна)
4	$\angle A_1BX = \angle A_2BX$	Із п.3
5	$\Delta A_1BX = \Delta A_2BX$	За першою ознакою рівності трикутників ($\angle A_1BX = \angle A_1BX$ із п. 4; $A_1B = BA_2$ із п. 3; BX — спільна)
6	$A_1X = A_2X$	Із п. 5
7	ΔA_1XA_2 — рівнобедрений	$A_1X = A_2X$
8	XA — медіана є висотою: $XA \perp A_1A_2$	ΔA_1XA_2 — рівнобедрений

Розв'язування задач

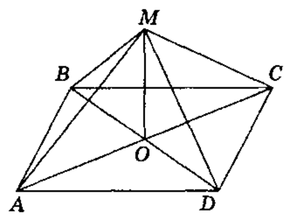

Рис. 140

1. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довести, що:
а) $AA_1 \perp (ABC)$; б) $AD \perp (DCC_1)$; в) $B_1D_1 \perp (A_1C_1C)$;

г) $A_1B_1 \perp BC_1$; д) ΔAB_1C_1 — прямокутний; е) AB_1C_1D — прямокутник.

2. Дано: ABCD — паралелограм; MA = MC, MB = MD. Довести, що MO $\perp$ (ABC) (рис. 140).
3. Дано: ABCD — квадрат; MB = MD (рис. 141). Довести, що BD $\perp$ (MAO).

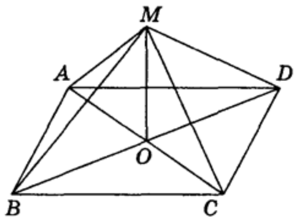

Рис. 141

Властивості прямої і площини, перпендикулярних між собою

Теорема 1.

Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

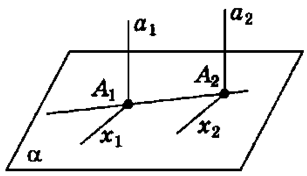

Рис. 153

Доведення

Нехай $a_1 \parallel a_2$ і $a_1 \perp \alpha$. Доведемо, що $\alpha \perp a_2$ (рис. 153). Точки A_1 і A_2 — точки перетину a_1 і a_2 з площиною α.

У площині α через точку A_2 проведемо довільну пряму x_2, а через точку A_1 — пряму x_1 таку, що $x_1 \parallel x_2$. Оскільки $a_1 \parallel a_2$, $x_1 \parallel x_2$ і $a_1 \perp x_1$, то за теоремою 3.1 $a_2 \perp x_2$. Оскільки x_2 вибрана довільно в площині α, то $a_2 \perp \alpha$.

Теорема 2.

Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то дані прямі паралельні.

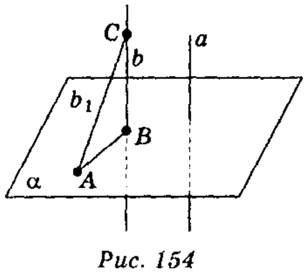

Рис. 154

Д о в е д е н н я

Нехай $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$. Доведемо, що $a \parallel b$ (рис. 154). Припустимо, що $a \nparallel b$. Тоді через точку C прямої b проведемо b_1, паралельну a. Оскільки $a \perp \alpha$, то і $b_1 \perp \alpha$ за доведеною теоремою, а за умовою $b \perp \alpha$. Якщо точки A і B — точки перетину прямих b_1 і b з площиною α, то з припущення випливає, що в трикутнику $\angle A = \angle B = 90°$, що не може бути. Отже, $a \parallel b$.

Розв'язування задач

1. Визначте вид чотирикутника AA_1B_1B якщо:

а) $AA_1 \perp \alpha$; $AA_1 \parallel BB_1$; $A \in \alpha$, $B \in \alpha$; $AA_1 \neq BB_1$ (рис. 155);

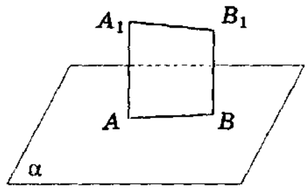

Рис. 155

б) $AA_1 \perp \alpha$; $BB_1 \perp \alpha$; $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ (рис. 156);

в) $A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $AA_1 \perp \alpha$; $BB_1 \perp \alpha$; $AA_1 = BB_1$ (рис. 156).

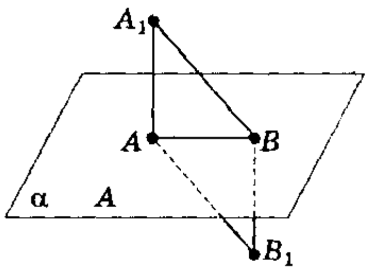

Рис. 156

Теорема 3.

Якщо пряма перпендикулярна до однієї із двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої.

Доведення

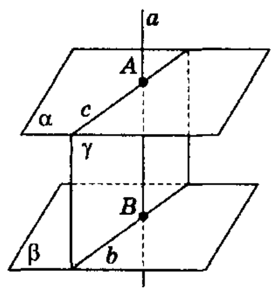

Рис. 157

Нехай $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \alpha$. Доведемо, що $\alpha \perp \beta$. (рис. 157). Нехай точки A і B — точки перетину прямої a з площинами α і β. В площині β проведемо через точку B довільну пряму b. Через пряму b і точку A проведемо площину γ, яка перетинає α по прямій c, причому $c \parallel b$. Оскільки $a \perp \alpha$, то $a \perp c$ (за означенням прямої, перпендикулярної до площини). Оскільки $a \perp c$, $b \parallel c$ і a, b, c лежать в γ, то $a \perp b$. Враховуючи, що b — довільна пряма площини β, маємо $a \perp \beta$.

Теорема 4.

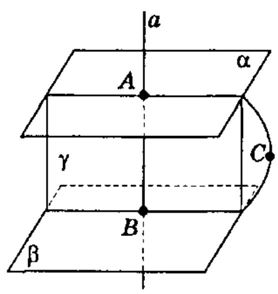

Рис. 158

Якщо дві площини, перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої, то вони паралельні.

Доведення

Нехай $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, доведемо, що $\alpha \parallel \beta$ (рис. 158). Нехай точки A і B — точки перетину прямої a з площинами α і β. Припустимо, що α $\nparallel$ β. Візьмемо точку C на прямій перетину площин α і β. C $\notin a$, бо в противному випадку через точку C проходили б дві різні площини α і β, перпендикулярні до прямої a, що неможливо. Проведемо площину γ через точку C і пряму a, ця площина перетинає α і β по прямих AC і BC відповідно. Оскільки $a \perp \alpha$, то $a \perp$ AC, аналогічно $a \perp$ BC. Отже, в площині γ через точку C проходять дві різні прямі AC і *BC,* які перпендикулярні до прямої a, що неможливо. Отже, α || β.

Розв'язування задач

1. Нехай ABCD – прямокутник, $BS \perp AB$, $AM \perp AB$ (рис. 159). Як розташовані площини AMD і BSC?
2. $B_1 \in \beta$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \perp \beta$; $BB_1 \parallel AA_1$; AA_1 = 12 см, A_1B = 13 см (рис. 160). Знайти AB.
3. $A_1 \in \alpha$. $B_1 \in \alpha$, $A_2 \in \beta$, $B_2 \in \beta$, $AA_1 \perp \alpha$; α || β (рис. 161). Визначте вид трикутників AA_1B_1 і AA_2B_2.

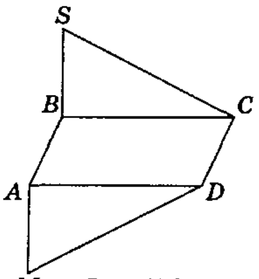

Рис. 159

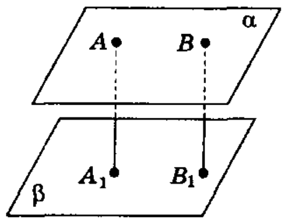

Рис. 160

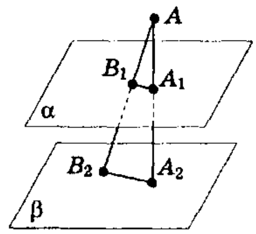

Рис. 161

III. Домашнє завдання

§ 9 [4 - Нелін], № 9.17 ст.245.

§ 5, п.34 [3 - Мерзляк]; № 34.8; 34.10, 34.14 (с. 180).

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Сформулюйте означення прямої, перпендикулярної до площини.

2) Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини.

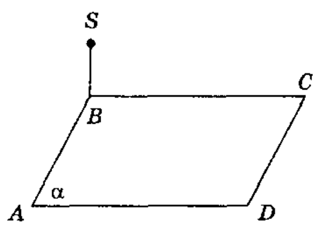

Рис. 142

3) Точка S лежить поза площиною ромба *ABCD,* причому $SB \perp BC$, $SB \perp AB$, $\angle BAD = 60°$ (рис. 142). Які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
   а) пряма *SB* перпендикулярна до площини ABC;
   б) пряма *AB* перпендикулярна до прямої *SB*;
   в) пряма *BC* перпендикулярна до площини *ASB*;

г) пряма *SB* перпендикулярна до прямої *BD* ?

4) Точка S лежить поза площиною трикутника *ABC*, причому $SA \perp AC$, $AB \perp AC$, $SA = SB = AB$ (рис. 143). Які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

а) пряма SA не перпендикулярна до площини ABC;

б) пряма *AB* перпендикулярна до площини SAC;

в) пряма AC перпендикулярна до площини SAB;

г) пряма *BC* перпендикулярна до площини ASC?

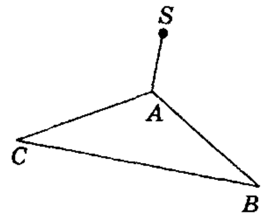

Рис. 143

5) Як розташовані прямі, які перпендикулярні до площини?

6) Як розташовані в просторі площини, які перпендикулярні до прямої?

7) Як розташовані пряма і площина, якщо паралельна пряма до даної прямої перпендикулярна до площини?

8) Як розташовані пряма і площина, якщо площина, паралельна до даної площини, перпендикулярна до даної прямої?