

ЛЕКЦІЯ №1

Тема заняття: Кут між прямими. Перпендикулярність прямих у просторі.

Мета заняття: формування поняття про перпендикулярні прямі. Вивчення теореми про прямі, що перетинаються і паралельні двом перпендикулярним прямим.

Хід заняття

I. Аналіз виконання тематичного оцінювання

II. Перевірка домашнього завдання

В кінці заняття збираються студентські конспекти для перевірки їх ведення та виконання домашнього завдання.

III. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Означення перпендикулярних прямих у просторі

Поряд із відношенням паралельності в геометрії важливе значення має відношення перпендикулярності. У планіметрії ми говорили про перпендикулярність прямих. Перпендикулярними прямими на площині називаються прямі, які перетинаються під прямим кутом.

У стереометрії розглядають три випадки перпендикулярності: перпендикулярність прямих, перпендикулярність прямої і площини, перпендикулярність площин. На наступних уроках ми займемося послідовним вивченням цих трьох відношень. Почнемо з випадку перпендикулярності прямих у просторі.

План вивчення теми

1. Кут між прямими, що перетинаються. Кут між паралельними прямими.
2. Означення перпендикулярних прямих.
3. Ознака перпендикулярності прямих.

1. Кут між прямими

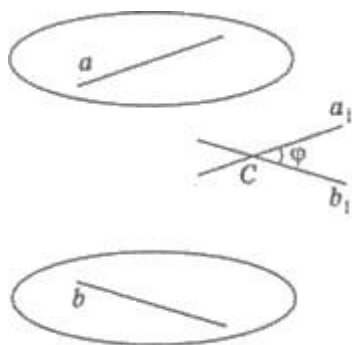
Як і на площині, у просторі

Кутом між прямими, що перетинаються, називають менший із кутів, що утворився при перетині цих прямих.

Якщо прямі паралельні, то природно вважати, що кут між такими прямими дорівнює нулю.

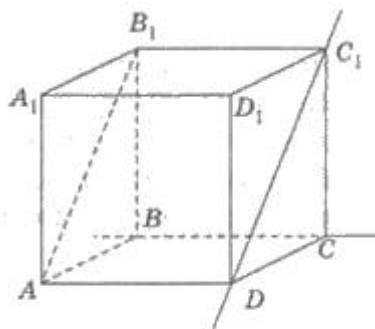
Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.

Нехай a_1 і b_1 - прямі, які перетинаються в точці C і паралельні мимобіжним прямим a і b , а кут між прямими a_1 і b_1 дорівнює φ (мал. 437). Тоді кут між прямими a і b також дорівнює φ . Можна довести, що кут між мимобіжними прямими a і b не залежить від вибору точки C . В задачах точку C зручно брати на одній із прямих, наприклад на прямій a , і проводити через цю точку пряму, паралельну прямій b .



мал. 437

Приклад. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб (мал. 438). Знайти кут між мимобіжними прямими BC і DC_1 .



мал. 438

Розв'язання. 1) Пряма AD паралельна прямій BC . Тому шуканий кут буде дорівнювати куту між прямими AD і DC_1 .

2) Оскільки $DC \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $C_1D \perp AD$.

3) Отже, кут між прямими BC і DC_1 дорівнює 90° .

Таким чином можна говорити про кут φ між будь-якими двома прямими простору. Очевидно, що цей кут φ задовольняє умові $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі.

Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом (кут між ними дорівнює 90°).

У розглянутому прикладі прямі BC і DC_1 - перпендикулярні.

Розв'язування задач

1. Назвіть в оточенні моделі прямих, які перпендикулярні між собою.
2. Дано зображення куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть ребра куба, які перпендикулярні до прямої AA_1 .

Теорема про прямі, що перетинаються і паралельні двом перпендикулярним прямим

Питання до групи: що можна стверджувати про взаємне розташування прямих a_1 і b_1 , які перетинаються і $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $a \perp b$? Студенти висувають гіпотезу, що $a_1 \perp b_1$. Для ілюстрації цього твердження використовується каркасна модель куба або прямокутного паралелепіпеда.

Далі формулюємо теорему:

Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні.

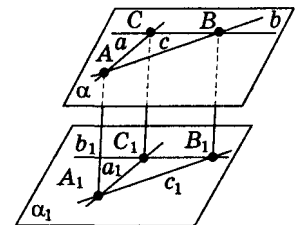


Рис. 131

Доведення цієї теореми проводить викладач. Подасмо запис доведення теореми, який рекомендується зробити на дошці і в зошитах студентів.

Дано: $a \perp b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$; $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $a_1 \subset \alpha_1$, $b_1 \subset \alpha_1$, a_1 і b_1 перетинаються (рис. 131).

Д о в е с т и : $a_1 \perp b_1$

Д о в е д е н н я

Номер	Твердження	Аргумент
1	a і b лежать в α , a_1 і b_1 лежать в α_1	С3
2	$a \parallel a_1$	Теорема 2.4

3	Нехай точка C — точка перетину a і b , точка C_1 — точка перетину a_1 і b_1	Означення
4	$AA_1 \parallel CC_1, BB_1 \parallel CC_1$	Теорема 2.1
5	$A_1A_2 \parallel BB_1$	Теорема 2.2
6	CAA_1C_1 і CBV_1C_1 — паралелограми, отже, $AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$	$AC \parallel A_1C_1; AA_1 \parallel CC_1,$ $CB \parallel C_1B_1, BB_1 \parallel CC_1$
7	ABB_1A_1 — паралелограм, отже, $AB = A_1B_1,$	$AB \parallel A_1B_1, AA_1 \parallel BB_1$
8	$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = 90^\circ$, тоді $a_1 \perp b_1$	Третя ознака рівності трикутників

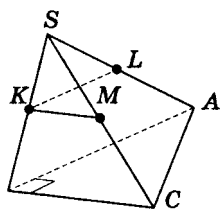


Рис. 132

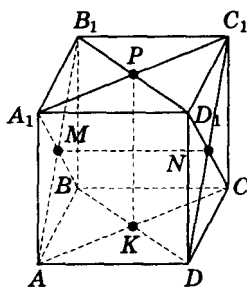


Рис. 133

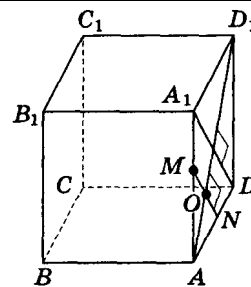


Рис. 134

Розв'язування задач

Робота з підручником

[4] (Нелін) № 8.2, 8.3, 8.4, 8.7, 8.11, 8.12(1,3), 8,14.

[3] (Мерзляк) № 33.2, 33.3, 33.4, 33.6, 33.9, 33.10.

Додаткове завдання. Промені AB , AC і AD попарно перпендикулярні. Площі трикутників ABC , ABD і ACD відповідно дорівнюють 96 см^2 , 30 см^2 і 40 см^2 . Знайдіть периметр трикутника $B CD$.

Відповідь. $33 + \sqrt{281} \text{ см}$.

- $SABC$ — тетраедр; $\angle ABC = 90^\circ$; точки K, L, M — середини ребер SB, SA, SC відповідно (рис. 132). Знайти $\angle MKL$.
- Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 133). Точки M, N, P, K — точки перетину діагоналей граней $ABB_1A_1, CDD_1C_1, A_1B_1C_1D_1$ і $ABCD$ відповідно. Довести, що $MN \perp PK$.
- Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точку M , що належить ребру AA_1 в грані AA_1DD_1 , проведіть пряму MN так, щоб $\angle MOD_1 = 90^\circ$, де точка O — точка перетину прямих MN і AD_1 .

Розв'язання

Проведемо в квадраті A_1ADD_1 діагоналі AD_1 і A_1D ($AD_1 \perp A_1D$) (рис. 134). Через точку M ребра AA_1 в грані ADD_1A_1 проведемо пряму $MN \parallel A_1D$. За теоремою $MN \perp AD_1$, оскільки $\angle A_1OD_1 = 90^\circ$.

4. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через точку O грані $A_1 A D D_1$ проведіть прямі OM і ON так, щоб $OM \parallel BC$, $ON \parallel CC_1$. Доведіть, що $\angle MON = 90^\circ$.
5. Через точку O перетину діагоналей куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведіть площину α , паралельну основі $A_1 B_1 C_1 D_1$ куба. Доведіть, що $\angle MON = 90^\circ$, де точки M , N — точки перетину ребер CC_1 і BB_1 з площиною α .

IV. Домашнє завдання

§ 8 [4 - Нелін], № 8.9; 8.12(2); 8.15 ст.244.

§ 5, п.33 [3 - Мерзляк]; № 33.5; 33.8, 33.11 (с. 180).

V. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

- 1) Які прямі в просторі називаються перпендикулярними?
- 2) Чи визначають площину дві перпендикулярні прямі? Чому?
- 3) Сформулюйте теорему про прямі, які перетинаються і відповідно паралельні перпендикулярним прямим.
- 4) Сторони двох трикутників відповідно паралельні. Чи паралельні відповідні висоти цих трикутників?
- 5) Ребро куба дорівнює a . Знайдіть довжину діагоналі грані куба. (Відповідь. $a\sqrt{2}$.)
- 6) Довжина діагоналі грані куба дорівнює a . Знайдіть ребро куба.

(Відповідь. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.)