ЛЕКЦІЯ № 2

Тема заняття: Перетин прямої з площиною. Перерізи многогранників. Існування площини, яка проходить через три дані точки. Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Паралельність прямих. Мимобіжність прямих.

Мета заняття: ознайомлення студентів із взаємним розташуванням прямої і площини у просторі. Вивчення теореми про належність прямої до площини. Формування поняття перерізу многогранника. вивчення теореми про існування єдиної площини, яка проходить через три дані точки, які не лежать на одній прямій. вивчення взаємного розташування двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються; паралельні прямі; мимобіжні прямі. Формування понять: паралельні прямі, мимобіжні прямі. Вивчення теореми про існування і єдиність прямої, яка проходить через дану точку і паралельна даній прямій. Вивчення ознаки паралельності прямих, формування умінь застосовувати ознаку паралельності до розв'язування задач. Вивчення ознаки мимобіжності прямих, формування вмінь застосовувати ознаку мимобіжності двох прямих до розв'язування задач.

1. Фронтальне опитування.

1) Скільки площин визначають дві прямі, які перетинаються?
2) Скільки площин визначають пряма і точка?
3) Скільки площин можна провести через три прямі, які мають спільну точку?
4) Скільки площин можна провести через пряму і дві точки, які не належать їй?

2. Математичний диктант

Дано зображення тетраедра SABC (варіант 1 – рис. 8, варіант 2 – рис. 9).

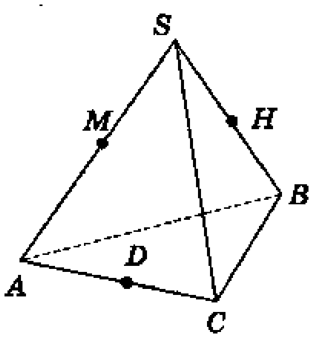


Рис. 8

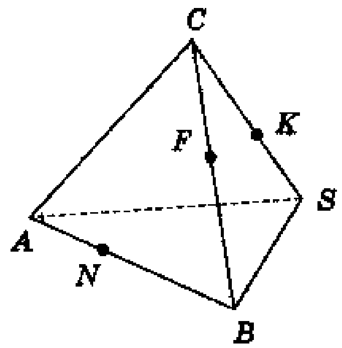


Рис. 9

Користуючись зображенням, запишіть:

1) точки, які належать площині грані ABC; (2 бали)
2) точки, які не лежать у площині грані ABC; (2 бали)
3) спільні точки площин граней ABC і ABS; (2 бали)
4) пряму перетину площин граней ABC і SBC; (2 бали)
5) площину, яка проходить через прямі AB і BC; (2 бали)
6) площину, яка не містить жодної із прямих AB і BC. (2 бали)

3. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Теорема про належність площині прямої, дві точки якої належать площині

Теорема.

Дано: $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ (рис. 12).

Довести: $BC \subset \alpha$.
Доведення

Візьмемо точку A, яка не лежить на прямій BC (згідно з аксіомою I). Через пряму BC і точку A проведемо площину α`.

Якщо площини α і α` збігаються, то площина α містить пряму BC (рис. 13).

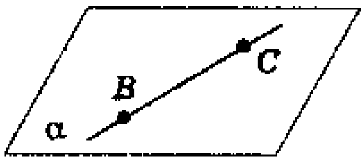


Рис. 12

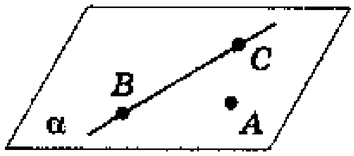


Рис. 13

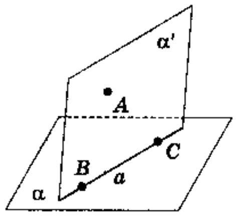


Рис. 14

Якщо площини α і α` різні, то вони перетинаються по прямій *a*, яка містить точки B і C (рис. 14). За аксіомою I прямі *a* і BC збігаються, отже, пряма BC лежить в площині α.

Виконання вправ

1. Доведіть, якщо вершини трикутника ABC належать деякій площині α, то трикутник ABC лежить в цій площині.
2. Доведіть, що чотирикутник ABCD лежить в одній площині, якщо його діагоналі AC і BD перетинаються.
3. Доведіть, що чотирикутник ABCD – плоский, якщо продовження двох протилежних сторін AB і CD перетинаються.
4. Як перевірити якість виготовлення лінійки за допомогою добре відшліфованої плити?

4.Поняття перерізу многогранника

У стереометрії розглядають перерізи многогранників.

Перерізом многогранника називається многокутник, який утворюється при перетині многогранника з площиною. Вершини цього многогранника є точками перетину січної площини з ребрами многокутника, а сторони – частинами прямих перетину січної площини з його гранями.

Для побудови простих перерізів необхідно вміти розв’язувати дві опорні задачі:

1) будувати лінію перетину двох площин;
2) будувати точку перетину прямої і площини.

Для побудови лінії перетину двох площин — січної площини і грані многогранника — знаходять дві точки шуканої прямої і через них проводять пряму.

Виконання вправ

1. Дано зображення трикутної піраміди (рис. 15). Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через пряму *AB* і точку *C*.
2. Дано зображення куба (рис. 16). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через пряму AB 1 точку C.
3. У трикутній піраміді SABC всі ребра дорівнюють 10 см. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через ребро AS і точку *M* — середину ребра BC. Знайдіть периметр побудованого перерізу.

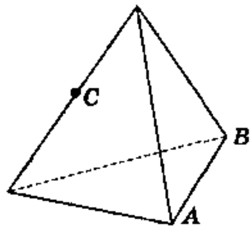


Рис. 15

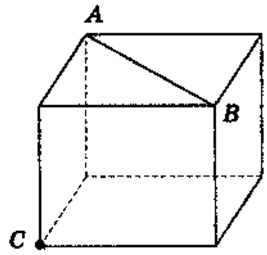


Рис. 16

3. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через діагональ BD верхньої основи і точку М — середину ребра AA_1. Обчисліть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює 10 см.

Виконання вправ

1. Чи можуть дві різні площини мати три спільні точки, які не лежать на одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.
2. Задача № 3 із підручника (с. 10).
3. Три точки в просторі розміщені так, що через них можна провести не менше 100 площин. Що можна сказати про розміщення цих точок?
4. Рівно о 12 годині з навчального полігону було запущено три ракети. О котрій годині центри мас цих ракет будуть знаходитися в одній площині?

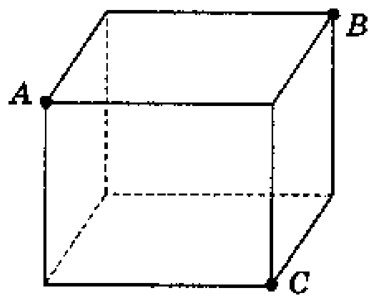


Рис. 19

5. Щоб надати більшої стійкості вимірювальним приладам, їх часто встановлюють на триногах. На якому теоретичному факті базуються такі дії?
6. Задано три точки А, В, С. Скільки площин можна провести через них, якщо:.
   а) АВ = 3 см, ВС = 4 см, АС = 5 см;
   б) АВ = 3 см, ВС = 4 ом, АС = 7 см?
7. Дано зображення куба (рис. 19). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки А, В, С.

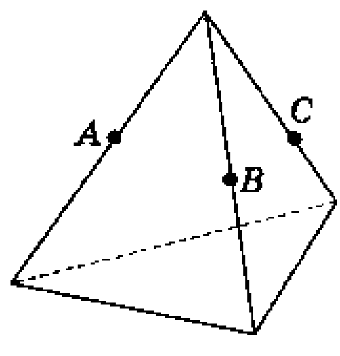


Рис. 20

8. Дано зображення трикутної піраміди (рис. 20). Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точки А, В, С.
9. Через середини трьох ребер куба, які виходять із однієї вершини проведено переріз. Обчисліть периметр і площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює $6\sqrt{2}$ см.
10. У трикутній піраміді, кожне ребро якої дорівнює 4 см, побудовано переріз площиною, яка проходить через середини трьох ребер, що виходять із однієї вершини. Обчисліть периметр і площу утвореного перерізу.

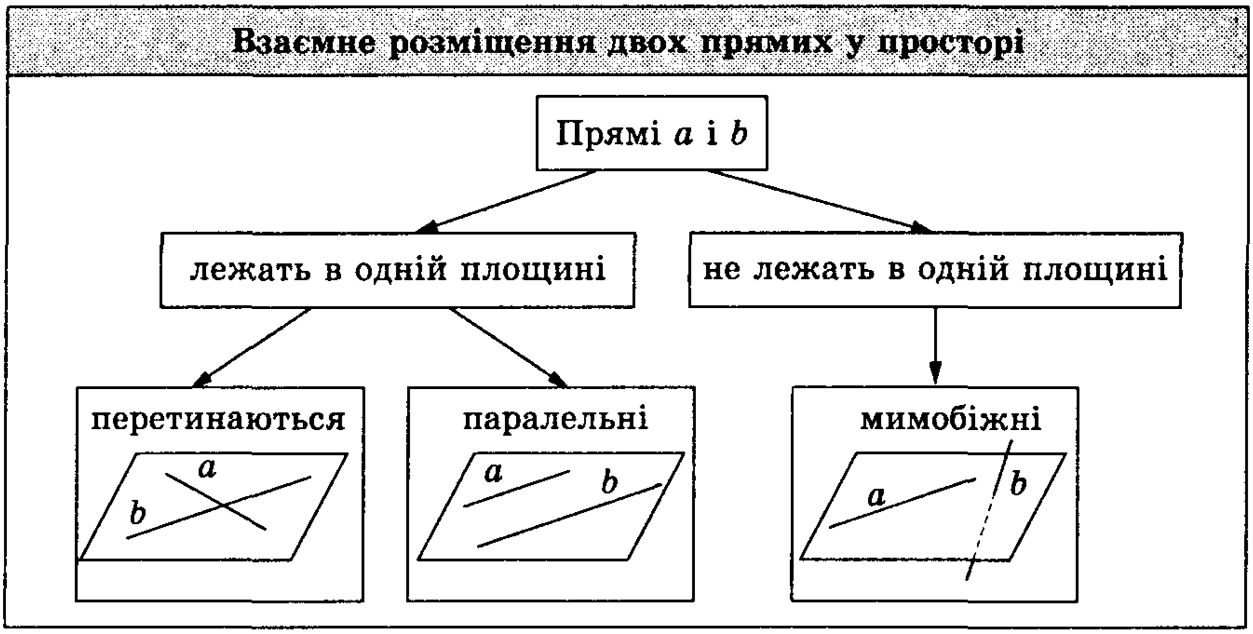
<u>5. Взаємне розміщення двох прямих у просторі</u>

Із курсу планіметрії відомо, що дві прямі, які лежать у площині, можуть перетинатися або не мати спільних точок. Якщо дві прямі лежать в одній площині і не мають спільних точок, то вони називаються паралельними. У просторі дві різні прямі або перетинаються, або не перетинаються. Проте другий випадок допускає дві можливості: прямі лежать в одній площині або прямі не лежать в одній площині.

Прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині, називають паралельними, а дві прямі, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називають ***мимобіжними.***

Випадки взаємного розташування двох прямих у просторі демонструються за допомогою стереометричного набору або на каркасній моделі куба.

Отже, дві прямі *a* і *b* у просторі можуть: перетинатися, бути паралельними, бути мимобіжними (демонструється схема, наведена нижче).



Виконання вправ

1. Різні випадки розташування двох прямих у просторі продемонструйте на предметах оточення.
2. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 32).
   а) Чи перетинаються прямі AA_1 і BB_1? A_1B_1 і D_1C_1? Як називаються ці прямі?
   б) Чи перетинаються прямі AD і BB_1? AB і DD_1? Як називаються ці прямі?
   в) Чи можна провести площину через прямі AD і DB_1? A_1D_1 і C_1D_1? AD і BB_1? AA_1 і DB_1 ? AA_1 і DD_1 ?

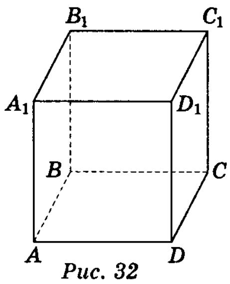


Рис. 32

3. Як розташовані осі залізничних вагонів між собою; відносно рейок?
4. Як треба розуміти, що прямі *a* і *b* у просторі не паралельні?
5. Що можна сказати про прямі *a* і *b,* якщо відомо, що вони не мимобіжні?

Теорема про існування і єдиність прямої, яка проходить через дану точку і паралельна даній прямій.

З аксіоми паралельності Евкліда випливає, що в площині через дану точку можна провести не більше

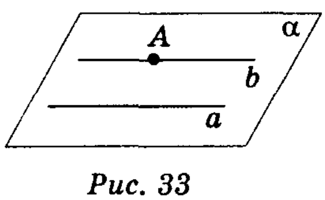


Рис. 33

однієї прямої, яка паралельна даній прямій. А скільки таких прямих можна провести у просторі?

Нехай дано пряму *a* і точку А, що не лежить на ній. Через них можна провести єдину площину (теорема 1.1). У цій площині можна провести єдину пряму *b,* яка паралельна прямій α (рис. 33).

Отже, у просторі через дану точку А можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій *a*.

Таким чином, справедлива теорема:

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.

Виконання вправ

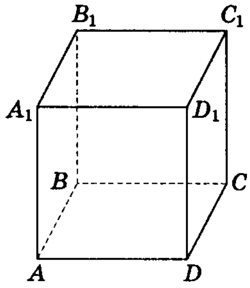


Рис. 34

1. Користуючись зображенням куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34), вкажіть пряму, яка проходить через точку A_1 і паралельна прямій: а) AD; б) AB; в) AC.
2. Скільки прямих, паралельних даній прямій *a*, можна провести через точку А, що належить прямій *a*?

<u>Ознака паралельності прямих</u>

Як довести паралельність двох прямих на площині? Можна скористатися означенням або ознаками паралельності, тобто теоремами, які дають достатні умови паралельності. Ви вивчали три ознаки паралельності прямих на площині: за рівністю між собою внутрішніх різносторонніх кутів між двома прямими і січною, за рівністю суми внутрішніх односторонніх кутів 180°, а також теорему, що дві прямі, які паралельні третій, паралельні між собою. Перші дві ознаки паралельності не мають аналогів для прямих у просторі. Остання ознака справедлива і в стереометрії. Сформулюємо її.

Теорема.

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

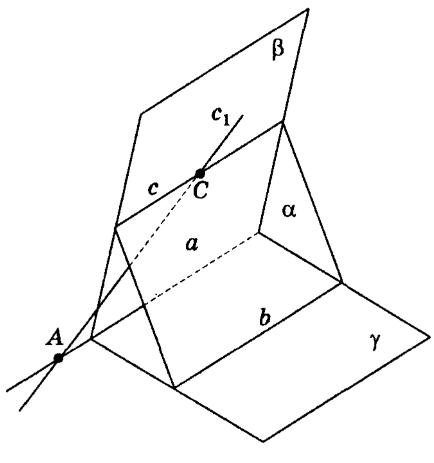


Рис. 36

Доведення теореми можна провести так, як це зроблено в підручнику, причому теорему вчитель спочатку доводить сам, а потім повторює доведення з учнями, звертаючи увагу на такі питання: чому площини β і γ різні? Чому точка В не лежить на прямій *c*? Чому площина γ; перетинає площину β, а не пристає до β ?

Можна довести теорему 2.2 іншим способом. Наведемо його.

Д о в е д е н н я

Нехай $b \parallel a$, $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Прямі *b* і *c* не можуть перетинатися. Інакше через точку їх перетину проходили б дві різні прямі, паралельні прямій *a*, що суперечило б теоремі 2.1.

Припустимо, що прямі *b* і *c* — мимобіжні (рис. 36). Через паралельні прямі *b* і *a*, *c* і *a* проведемо площини γ і β, а через пряму *b* і точку С прямої *c* — площину α. Нехай площини α і β перетинаються по прямій c_1. Прямі *a*, *c*, c_1 лежать в одній площині β , причому $c \parallel a$. Тому пряма c_1, яка перетинає *c*, перетинає пряму *a* в деякій точці А. Прямі c_1 і *a* лежать відповідно у площинах α і γ , тому їх спільна точка А належить цим площинам, а отже, і їх спільній прямій *b*. З припущення випливає, що паралельні прямі *a* і *b* мають спільну точку А, що суперечить умові.

Отже, прямі *b* і *c* не можуть ні перетинатися, ні бути мимобіжними. Таким чином, $b \parallel c$.

Виконання вправ

1. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що;
   а) $AA_1 \parallel CC_1$; б) $AB \parallel C_1D_1$; в) $AC \parallel A_1C_1$.
2. Чи правильне твердження: якщо прямі *b* і *c* не паралельні одній і тій самій прямій а, то *b* і *c* не паралельні між собою?
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед. Доведіть, що площина ACC_1 проходить через точку А,.
4. Прямі *a* і *b* паралельні, а прямі *b* і *c* не паралельні. Доведіть, що прямі *a* і *c* не паралельні.

Ознака мимобіжності прямих

Часто при розв'язуванні задач необхідно з'ясовувати: чи мимобіжні дані прямі? Користуючись означенням мимобіжності прямих, важко відповісти на це питання. Тому сформулюємо й доведемо ознаку мимобіжних прямих.

Теорема.

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не лежить на першій прямій, то ці прямі мимобіжні.

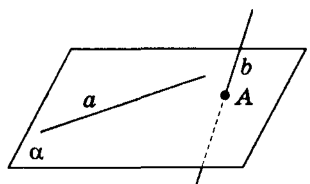


Рис. 38

Доведення

Нехай пряма *a* лежить у площині α , а пряма *b* перетинає цю площину в точці А такій, що $A \notin \alpha$ (рис. 38). Доведемо, що прямі *a і b* мимобіжні. Припустимо, що прямі *a* і *b* не мимобіжні, тобто вони лежать в деякій площині β . Площина β проходить через пряму *a* і точку А і тому збігається з площиною α . Таким чином, пряма *b* лежить в площині α, що суперечить умові. Отже, прямі *a* і *b* не лежать в одній площині, що і треба було довести.

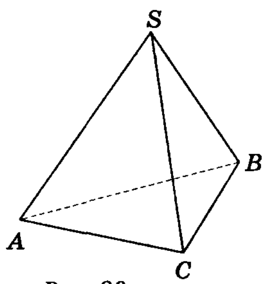


Рис. 39

Виконання вправ

1. Дано в трикутнику піраміду SABC (рис. 39). Довести, що вказані прямі мимобіжні.а) *SC* і AB; б) SB і AC; в) AS і *BC*.
2. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40). Довести, що вказані прямі мимобіжні.

а) AB і CC_1; б) AC_1 і *DC;* в) AC і B_1D_1; г) AC_1 і BA_1.

3. Трикутники ABC і *ABD* не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі *AB і CD* не лежать в одній площині.
4. Пряма *c* перетинає пряму *a* і не перетинає пряму *b,* паралельну прямій *a.* Доведіть, що *b* і *c* — мимобіжні прямі.

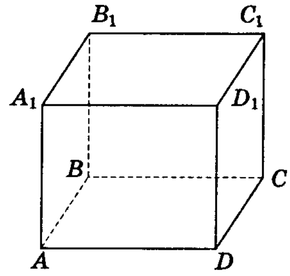


Рис. 40

6. Закріплення та осмислення знань студентів

Розв'язування вправ

1. Прямі AB і *CD* паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і *BD?* А перетинатися?
2. Прямі *AB* і *CD* мимобіжні. Чи можуть бути прямі *AC і BD* паралельними? А перетинатися?
3. *K, P,T, M* — середини ребер *AB, AC, CD, DB* тетраедра *DABC.* Знайдіть периметр чотирикутника *KPTM,* якщо *AD* = 6 см, *BC* = 8 см.

<u>Ознака паралельності прямих</u>

Розв'язування задач

1. Трикутник ABC і трапеція ABED (AB — основа) не лежать в одній площині. Точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що MN || DE .
2. Точки K, L, M, N — середини ребер AB, AC, CD, DB тетраедра, всі ребра якого рівні. Знайдіть довжину ребра тетраедра, якщо периметр утвореного чотирикутника KLMN дорівнює 4*a* (рис. 37).

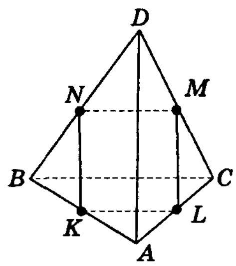


Рис. 37

7. Домашнє завдання

§2, §3 - Істер [1] (с. 237-258), 2.3,2.6,2.10,2.14,2.21,2.34,2.37,3.15,3.26,3.34.

8. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Що можна стверджувати про пряму, дві точки якої належать даній площині?

2) Точки A і B належать площині α , а точка C лежить поза площиною α . Вкажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

а) пряма AC лежить в площині α ;

б) пряма *CB* не лежить в площині α ;

в) пряма AB лежить поза площиною α ;

г) пряма *AB* лежить в площині α .

3) Скільки площин можна провести через три дані точки?
4) У просторі дано три точки A, B, C, які лежать на одній прямій.
Визначте, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
   а) через точки A, B, C можна провести тільки одну площину;
   б) через точки A, B, C можна провести безліч площин;
   в) через точки A і B можна провести площину, яка не містить точку C;
   г) через A можна провести площину, яка має з прямою BC тільки одну спільну точку.