ЛЕКЦІЯ № 4

Тема заняття: Паралельність площин.

Мета заняття: Формування знань студентів про взаємне розміщення двох площин у просторі. Вивчення ознаки паралельності двох площин. Вивчення теореми про існування єдиної площини, яка паралельна даній площині і проходить через дану точку, що не належить даній площині. Формування знань студентів про властивості паралельних площин.

Хід заняття

І. Узагальнення та систематизація знань студентів

Взаємне розміщення прямої і площини в просторі

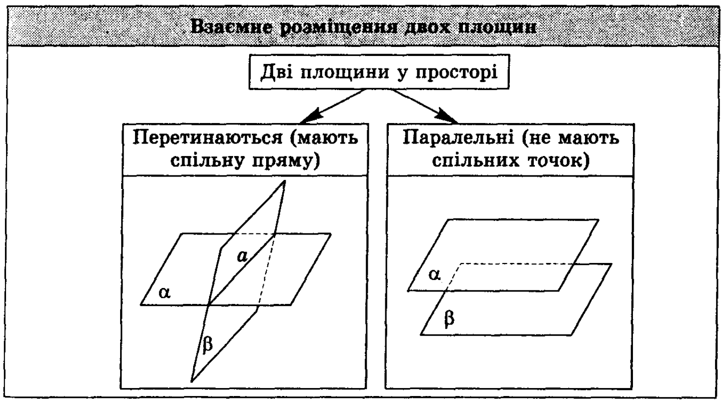
Запитання до групи.

1) Згадайте і сформулюйте теорему про належність площині прямої, дві точки якої належать площині.
2) Як можуть розміщуватися пряма і площина в просторі?

ІІ. Сприйняття й усвідомлення нового матеріалу

Взаємне розміщення двох площин у просторі, означення паралельних площин

Ми знаємо, якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій (аксіома C_2). Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають спільних точок (демонструємо схему, наведену нижче).



Дві площини називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.

Уявлення про паралельні площини дають підлога і стеля кімнати, дві протилежні стіни, поверхня стола і площина підлоги. Якщо площини α і β паралельні, пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

Виконання вправ

1. Наведіть приклади паралельних площин із оточення.

2. На моделях куба, прямокутного паралелепіпеда покажіть паралельні та площини, що перетинаються.

3. Користуючись зображенням прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, укажіть:

а) грані, які перетинають грань ABCD;

б) площини, які паралельні площині ABC.

4. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

Ознака паралельності площин

Формулюється ознака паралельності площин і проводиться доведення її згідно з підручником. Доречно зробити записи в зошитах.

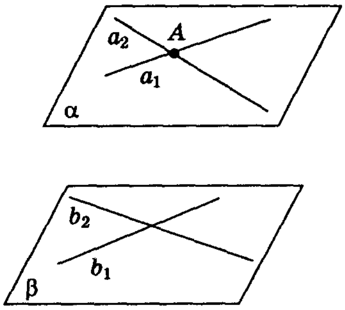


Рис. 59

Теорема.

Д а н о :

$a_1 \subset \alpha$; $a_2 \subset \alpha$; a_1 і a_2 перетинаються в точці А; $b_1 \subset \beta$; $b_2 \subset \beta$; $a_1 \parallel b_1$; $a_2 \parallel b_2$ (рис. 59).

Д о в е с т и : $\alpha \parallel \beta$.

Д о в е д е н н я

Припустимо, що α і β перетинаються по *c*. Оскільки $a_1 \parallel b_1$, то $a_1 \parallel \beta$, отже, $a_1 \parallel c$. Оскільки $a_2 \parallel b_2$ то $a_2 \parallel \beta$, отже, $a_2 \parallel c$. Через точку А проходять дві прямі a_1 і a_2, які паралельні *c,* що суперечить аксіомі паралельності. Отже, $\alpha \parallel \beta$.

Виконання вправ

1. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин:
   а) ABC і $A_1B_1C_1$; б) AB_1D_1 і BDC_1.

2. Точка *B* лежить поза площиною α. Проведіть через точку B площину, паралельну площині α.

3. Доведіть, що площини α і β паралельні, якщо дві прямі *a* і *b,* які лежать у площині α і перетинаються, паралельні площині β.

4. Відомо, що дві прямі, які лежать у площині α , паралельні двом прямим площини β. Чи випливає з цього, що $\alpha \parallel \beta$?

Теорема про існування площини, що паралельна даній площині

Перед вивченням нового матеріалу доцільно поставити учням питання: як ви вважаєте, скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через дану точку?

При обговоренні звернути увагу учнів на розгляд двох випадків: 1) дана точка належить даній площині; 2) дана точка лежить поза даною площиною.

Далі повідомляється тема і формулюється теорема.

Теорема.

Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

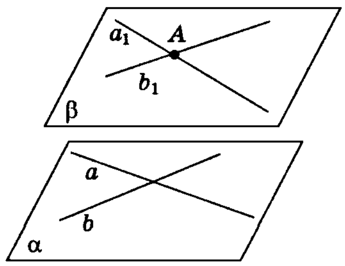


Рис. 62

Доведення розіб'ємо на дві частини.

1. Доведемо, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній площині.

Наводимо зразок запису доведення першої частини на дошці.

Д а н о : α, $A \notin \alpha$ (рис. 62).

Д о в е с т и : існує β, $\beta \parallel \alpha$, $A \in \beta$.

Доведення

Проводимо в площині а дві прямі *a* і *b*, які перетинаються.

Через точку А проведемо прямі a_1 і b_1 такі, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (теорема 2.1).

Через прямі a_1 і b_1 проведемо площину β, яка паралельна α (теорема 2.4).

Звертаємо увагу учнів на те, що безпосередньо з доведення існування площини β не випливає, що β — єдина, бо прямі a і b вибрані довільно, тому може статися, що другій парі таких прямих буде відповідати друга площина β_1, паралельна a.

2. Доведемо, що через точку поза даною площиною проходить тільки одна площина, паралельна даній площині. Наводимо зразок запису доведення другої частини на дошці.

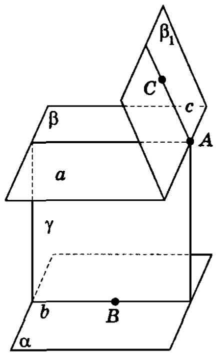


Рис. 63

Д а н о : α, $A \notin \alpha$, β, $\beta \parallel \alpha$, $A \notin \beta$ (рис. 63).

Д о в е с т и : β — єдина.

Д о в е д е н н я

Припустимо, через точку А проходить β_1 така, що $\beta_1 \parallel \alpha$.

Візьмемо точку С таку, що $C \in \beta_1$, $C \notin \beta$.

Візьмемо точку В, $B \in \alpha$.

Через точки А, В, С проведемо γ, яка перетинає α по прямій b, β — по a, β_1 — по c.

Тоді $a \parallel b$, $c \parallel b$. Отже, через точку А проходять дві різні прямі a і c, які паралельні прямій b, що суперечить теоремі 2.1.

Виконання вправ

1. Через пряму a, яка паралельна площині α, проведіть площину, паралельну даній площині α. Скільки площин можна провести?
2. Доведіть, що якщо площина γ перетинає одну з паралельних площин α або β, то вона перетинає і другу площину.
3. Доведіть, що через будь-які мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.

Властивості ліній перетину двох паралельних площин третьою площиною

Запитання до групи

1) Знайдіть у класній кімнаті модель двох паралельних площин, які перетинаються третьою площиною.
2) Покажіть лінії перетину цих площин третьою площиною.
3) Що можна сказати про взаємне розташування цих прямих? Далі формулюється теорема.

Теорема.

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

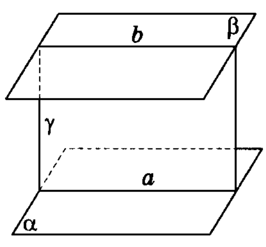


Рис. 66

Цю теорему можна сформулювати по-іншому:

Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

Доведемо теорему. Наводимо запис, який можна зробити на дошці і в зошитах учнів.

Д а н о : $\alpha \parallel \beta$; γ перетинає α по прямій a; γ перетинає β по прямій b.

Д о в е с т и : $a \parallel b$ (рис. 66).

Доведення

Припустимо, що $a \nparallel b$. Оскільки a і b лежать в γ , то вони перетинаються в деякій точці А; $A \in \alpha$, бо $a \subset \alpha$; $A \in \beta$, бо $b \subset \beta$. Отже, α і β перетинаються, що суперечить умові: $\alpha \parallel \beta$. Отже, $a \parallel b$.

Розв'язування задач

1. Паралельні площини α і β перетинають сторону АВ кута ВАС відповідно в точках A_1 і A_2, а сторону АС цього кута — відповідно в точках B_1 і B_2. Знайдіть: а) AA_2 і AB_2, якщо $A_1A_2 = 2A_1A$, $A_1A_2 = 12$ см, $AB_1 = 5$ см; б) A_2B_2 і AA_2, якщо $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$.

(Відповідь, а) $AA_2 = 18$ см; $AB_2 = 15$ см; б) $A_2B_2 = 54$ см, $AA_2 = 72$ см.)

Теорема про відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами

Можна запропонувати довести теорему самостійно. Наводимо запис, який можна зробити на дошці та в зошитах учнів.

Теорема.

Д а н о : $\alpha_1 \parallel \alpha_2$; $A_1 \in \alpha_1$, $B_1 \in \alpha_1$, $A_2 \in \alpha_2$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

Д о в е с т и : $A_1A_2 = B_1B_2$ (рис. 67).

Д о в е д е н н я

Проведемо площину у через прямі A_1A_2 і B_1B_2.

Чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ — паралелограм, бо $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ (за умовою), $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (за теоремою про паралельність ліній перетину двох паралельних площин третьою площиною). Отже, $A_1A_2 = B_1B_2$.

Розв'язування задач

Паралельні відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 розміщені між паралельними площинами α і β (рис. 68).

а) Визначте вид чотирикутників $A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $A_1C_1C_2A_2$.

б) Доведіть, що $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$.

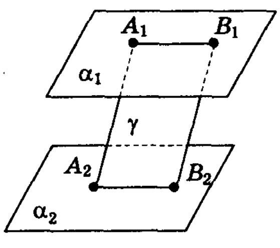


Рис. 67

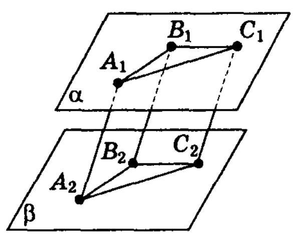


Рис. 68

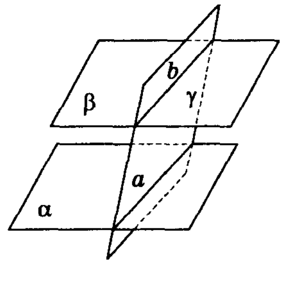


Рис. 69

III. Домашнє завдання

§1 - Істер [1] (с. 268-276), задачі № 5.5, 5.8, і 5.11, 5.22, 5.24, 5.27, 5.35, 5.40.

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1)Як можуть розташовуватися дві площини у просторі?

2) Сформулюйте ознаку паралельності площин.

3) Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через точку,

яка:

а) належить даній площині;

б) не належить даній площині?

4) Сформулюйте теорему про лінії перетину двох паралельних площин третьою площиною.

5) Дві паралельні площини α і β перетинаються площиною γ по прямих a і b (рис. 69). Укажіть, які з тверджень правильні, а які — неправильні:

а) прямі a і b можуть бути мимобіжними;

б) прямі a і b обов'язково паралельні;

в) пряма a паралельна площині β;

г) будь-яка пряма, яка лежить у площині γ , обов'язково перетинає обидві площини α і β.

6) Сформулюйте теорему про властивість паралельних відрізків, які лежать між паралельними площинами.

7) Площини α і β паралельні (рис. 70). Паралельні прямі a і b перетинають площину α в точках A_1, B_1, а площину β — в точках A_2, B_2. Укажіть, які з тверджень правильні, а які — неправильні:

а) $A_1A_2 = B_1B_2$;

б) прямі A_1B_1 і A_2B_2 паралельні;

в) прямі A_1B_2 і A_2B_1 мимобіжні;

г) прямі A_1B_2 і A_2B_1 перетинаються.

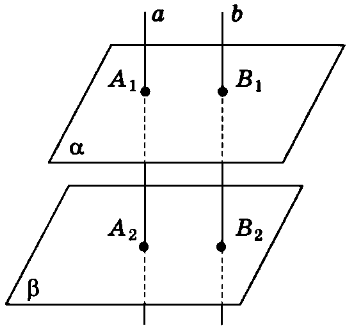


Рис. 70