ЛЕКЦІЯ №4

Тема заняття. *Поняття площі поверхні. Площа бічної і повної поверхні циліндра. Площа бічної і повної поверхні конуса. Площа сфери.*

Мета заняття: *формування поняття площі поверхні; вивчення формули для площі бічної поверхні циліндра, а також умінь знаходити площу поверхні циліндра. Вивчення формули для площі сфери; формування вмінь застосовувати вивчену формулу до розв'язування задач.*

Обладнання: *моделі циліндра, конуса, сфери*

I. Перевірка домашнього завдання

Наприкінці заняття збираються студентські конспекти для перевірки виконання домашнього завдання та ведення конспектів.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Пояснення матеріалу про площу поверхні циліндра, конуса, сфери можна провести так, як це зроблено в § 11 *ст.279 підручника Олександр Істер «Математика рівень стандарту» , 11 клас* .

Наводимо інший варіант пояснення нового матеріалу.

1. Площа поверхні циліндра

Поверхня циліндра складається з двох рівних основ і бічної поверхні. Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і якій-небудь твірній, а потім розгорнути на площині, то дістанемо розгортку циліндра (рис. 167). Вона складається з прямокутника, сторони якого дорівнюють довжині кола основи циліндра і його висоті, і двох кругів, що дорівнюють основам циліндра.

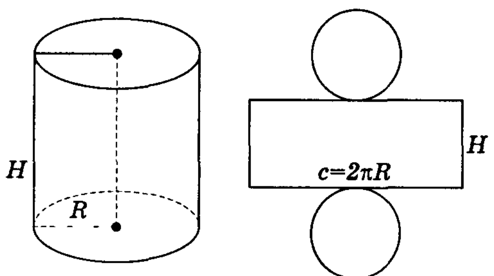

Рис. 167

Площею бічної і повної поверхні циліндра називають площу розгортки бічної і повної поверхні. Тоді площа бічної поверхні $S_{біч}$ і площа повної поверхні $S_{цил}$ визначаються формулами:

$S_{біч} = 2\pi RH$,

$S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$, де R, H — радіус і висота циліндра відповідно.

Розв'язування задач

1. Діаметр циліндра дорівнює 1 см, а висота дорівнює довжині кола основи. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. (*Відповідь,* π^2.)
2. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 15π. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра. (*Відповідь. 15*.)
3. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 8 см. Знайдіть бічну поверхню циліндра. (*Відповідь.* 64π *см*^{2}.)

4. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 16 см^2. Знайдіть повну поверхню циліндра. (*Відповідь. 24π см^2.*)
5. Радіус циліндра дорівнює r, а діагональ осьового перерізу — *d*. Знайдіть площу бічної поверхні і площу повної поверхні циліндра.
   (*Відповідь.* $2\pi r\sqrt{d^2-4r^2}$; $2\pi r(r+\sqrt{d^2-4r^2})$.)
6. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює *Q*. Знайдіть площу бічної поверхні. (*Відповідь. πQ.*)
7. Площа поверхні і площа бічної поверхні циліндра дорівнюють 50 см^2 і 30 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра. (*Відповідь.* $\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ *см;* $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{10}{\pi}}$ *см.*)
8. Бічна поверхня циліндра дорівнює S, а довжина кола основи — с. Знайдіть об'єм циліндра. (*Відповідь.* $\frac{cS}{4\pi}$.)
9. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює S, а його об'єм — V. Знайдіть його висоту. (*Відповідь.* $\frac{S^2}{4\pi V}$.)

2. Самостійна робота.

Варіант 1

1) Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа основи циліндра дорівнює Q, а площа бічної поверхні — S. *(5 балів)*
2) Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120°. Площа перерізу дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2, а його діагональ утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. *(7 балів)*

Варіант 2

1) Бічна поверхня циліндра дорівнює S, а висота — *H*. Знайдіть об'єм циліндра. *(5 балів)*
2) Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 60°. Площа перерізу дорівнює $12\sqrt{3}$ см^2, а його діагональ утворює з твірною циліндра кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. *(7 балів)*

Варіант 3

1) Бічна поверхня циліндра дорівнює *S,* а довжина кола основи дорівнює С. Знайдіть об'єм циліндра. (5 *балів)*
2) У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює *S. (7 балів)*

Варіант 4

1) Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа його основи дорівнює *Q,* а площа бічної поверхні — πS . *(5 балів)*
2) У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S. *(7 балів)*

Відповідь. Варіант 1.1) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$; 2) 32π см^2.   Варіант 2. 1) $\frac{S^2}{4\pi H}$; 2) $24\pi\sqrt{3}$ см^2.

Варіант 3. 1) $\frac{SC}{4\pi}$; 2) $4S\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta$. Варіант 4. 1) $\frac{S}{2}\sqrt{\pi Q}$; 2) $\frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

2. Площа поверхні конуса

Бічну поверхню конуса, як і бічну поверхню циліндра, можна розгорнути на площину, розрізавши її по твірній (рис. 170).

Розгорткою бічної поверхні конуса є круговий сектор, радіус якого Дорівнює твірній конуса, а довжина дуги сектора — довжині кола основа конуса. Площею бічної поверхні конуса будемо вважати площу її розгортки. Виразимо площу бічної поверхні конуса $S_{біч}$, через його твірну l і радіус основи R. Площа кругового сектора — розгортки бічної поверхні конуса (рис. 170) — дорівнює $\frac{\pi\cdot l}{360}\alpha$, де α — градусна міра дуги AA_1, тому $S_{біч}=\frac{\pi\cdot l^2}{360}\alpha$ (1). Виразимо α через l і R. Оскільки довжина дуги AA_1 дорівнює 2πR (довжині кола основи конуса), то 2πR = $\frac{\pi\cdot l}{180}\alpha$, звідси $\alpha=\frac{360R}{l}$. Підставивши цей вираз у формулу (1), одержимо: $S_{біч}=\frac{\pi\cdot l^2}{360}\cdot\frac{360R}{l}=\pi Rl$.

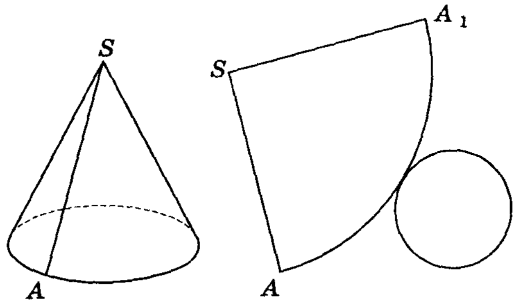

Рис. 170

Таким чином, площа бічної поверхні конуса дорівнює добутку половини довжини кола основи та твірну: $S_{біч} = \pi Rl$.

Площею повної поверхні конуса називається сума площ бічної поверхні та основи. Для обчислення площі повної поверхні конуса $S_к$ одержуємо формулу

$S_к = \pi R (l + R)$.

Розв'язування задач

1. Висота конуса дорівнює 6 см, радіус основи — 8 см. Знайдіть бічну поверхню конуса. *(Відповідь. 80π см^2.)*
2. Твірна конуса дорівнює 5 см, висота — 4 см. Знайдіть площу його повної поверхні. *(Відповідь. 24π см^2.)*
3. Осьовий переріз конуса — правильний трикутник, сторона якого дорівнює 6 см. Знайдіть бічну поверхню конуса. *(Відповідь. 18π см^2.)*
4. Площа осьового перерізу конуса 0,6 см^2. Висота конуса дорівнює 1,2 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса. *(Відповідь. 0,9π см^2.)*
5. Площа основи конуса дорівнює 36 см^2, а його твірна — 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса. *(Відповідь. $60\sqrt{\pi}$ см^2.)*
6. Кут між твірною і віссю конуса дорівнює 45° , а твірна — 6,5 см. Знайдіть площу

бічної поверхні конуса. *(Відповідь.* $\frac{169\pi\sqrt{2}}{8}$ *см²*.)

7. Твірна конуса дорівнює 14 см, а кут при вершині осьового перерізу — 60°. Знайдіть площу повної поверхні конуса. *(Відповідь. 147π см².)*
8. Твірна конуса дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу повної поверхні конуса. *(Відповідь.* 48π см².)

III. Закріплення та осмислення знань студентів

Знаходження площі поверхні конуса

Розв'язування задач

1. Площа основи конуса дорівнює *S,* а площа його поверхні — 3S. Під яким кутом нахилена твірна до площини основи? *(Відповідь. 60°.)*
2. Висота конуса — 4 см, твірна — 5 см. Знайдіть кут сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса. *(Відповідь. 216°.)*
3. За радіусом основи *R* і твірною конуса *l* знайдіть кут у розгортці бічної поверхні цього конуса. *(Відповідь.* $\frac{360^o R}{l}$*.)*
4. Периметр осьового перерізу конуса дорівнює *Р,* кут між твірною і основою дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні конуса. *(Відповідь.* $\frac{\pi P^2 \cos\alpha}{16\cos^4\frac{\alpha}{2}}$*.)*
5. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. В основу конуса вписано трикутник; у якого одна сторона дорівнює *а*, а протилежний кут дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні конуса. *(Відповідь.* $\frac{\pi a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$.)

<u>3. Площа сфери</u>

Задача № 1

Навколо сфери радіуса r описано опуклий многогранник. Доведіть, що його об'єм *V* може бути обчислений за формулою

$$V = \frac{1}{3} Sr$$, де *S* — площа поверхні многогранника.

Розв'язання

З'єднаємо центр сфери точку О з усіма вершинами многогранника (рис. 179). Тоді об'єм *V* многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, основи яких — грані даного многогранника, а висота дорівнює радіусу r вписаної кулі:

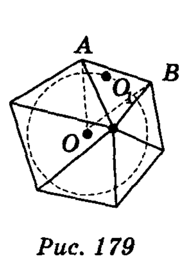

Рис. 179

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \frac{1}{3}S_3r + ... + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}r\,(S_1 + S_2 + ...S_n) = \frac{1}{3}rS,$$

де S_1, S_2, S_3 , ..., S_n — площі граней многогранника, S — площа поверхні многогранника.

Задача № 2

Радіус сфери дорівнює r. Знайдіть площу сфери.

Р о з в ' я з а н н я

Опишемо навколо сфери опуклий многогранник з *n* малими гранями. Будемо необмежене збільшувати *n* таким чином, щоб площа кожної грані наближалася до нуля. За площу сфери приймемо границю послідовності площ поверхонь, описаних навколо сфери многогранників, за умови наближення до нуля площі кожної грані.

Нехай S_n — площа поверхні многогранника, V_n — його об'єм. Тоді, згідно з задачею № **1,** маємо: $V_n = \frac{1}{3} S\,R$.

Будемо тепер необмежене збільшувати число *n,* тоді число граней многогранника буде необмежене збільшуватися, площа його поверхні буде наближатися до площі сфери *S,* а об'єм многогранника — до об'єму *V* кулі:

Отже $V = \frac{1}{3}SR$, звідси маємо: $S = \frac{3V}{R} = \frac{3\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot R^3}{R} = 4\pi R^2$.

Таким чином, площа S сфери радіуса *R* обчислюється за формулою

$S = 4\pi R^2$.

Розв'язування задач

1. Знайдіть площу поверхні кулі, діаметр якої 10 см. *(Відповідь.* 100π см^2.)
2. Площа великого круга кулі дорівнює 20π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі. *(Відповідь. 80π см^2.)*
3. Площа поверхні кулі дорівнює 64π см^2. Знайдіть діаметр кулі. *(Відповідь. 8 см.)*
4. Довжина кола великого круга кулі дорівнює 10π см. Знайдіть площу поверхні кулі. *(Відповідь. 100π см^2.)*
5. Дано півкулю радіуса R. Знайдіть її повну поверхню. *(Відповідь. 3πR.)*
6. Як зміниться площа поверхні кулі, якщо її радіус збільшити у 2 рази? *(Відповідь. Збільшиться в 4 рази.)*
7. Доведіть, що, якщо рівносторонній конус і півкуля мають спільну основу, то площа бічної поверхні конуса дорівнює площі сферичної поверхні півкулі.

<u>Самостійна робота.</u>

Варіант 1

а) Як зміниться поверхня кулі, якщо радіус кулі збільшиться в 4 рази?

б) У кулі на відстані 12 см від її центра проведено переріз, площа якого дорівнює 64π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

Варіант 2

а) Поверхня сфери дорівнює 36π см^2. Знайдіть об'єм відповідної кулі.

б) Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який утворює з цим радіусом кут 30°. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо площа перерізу дорівнює 36π см^2.

Варіант 3

а) Як зміниться поверхня кулі, якщо радіус кулі зменшити у 5 раз?

б) Переріз кулі площиною, яка віддалена від її центра на 15 см, має площу 64π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

Варіант 4

а) Поверхня кулі дорівнює 324π . Знайдіть її об'єм.

б) Довжина лінії перетину сфери і площини, яка віддалена від її центра на 12 см, дорівнює 10π см. Знайдіть площу поверхні кулі.

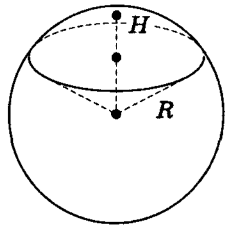

Рис. 180

Відповідь. Варіант 1. а) Збільшиться у 16 раз; б) 832π см^2.
Варіант 2. а) 36π см^3; б) 192π см^2.
Варіант 3. а) Зменшиться у 25 раз; б) 1156π см^2.
Варіант 4. а) 972π; б) 676π см^2.

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра?
2) Запишіть формулу для знаходження площі бічної та повної поверхні циліндра.
3) Висота конуса дорівнює *H*, а діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи кут 45°. Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

а) радіус циліндра дорівнює $\frac{H}{2}$;

б) площа основи циліндра дорівнює πH^2;

в) бічна поверхня циліндра дорівнює $\frac{\pi H^2}{2}$;

г) повна поверхня циліндра дорівнює $\frac{3\pi H^2}{2}$.

4) Чому дорівнює бічна поверхня конуса?
5) Запишіть формули для знаходження площ бічної і повної поверхні конуса.
6) Радіус кулі дорівнює 6 см. На відстані 4 см від її центра проведено площину. Знайдіть площу сфери.