ЛЕКЦІЯ № 2

Тема заняття. *Об'єм піраміди.*

Мета заняття: *виведення формули об'єму піраміди; формування умінь знаходити об'єми пірамід.*

Обладнання: *моделі пірамід.*

I. Перевірка домашнього завдання

1. Перевірити наявність виконаного домашнього завдання та відповісти на запитання, які виникли в студентів при виконанні задач.
2. Фронтальне опитування.
   1) Назвіть основні властивості об'єму.
   2) Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють *a*, *b*, c?
   3) Коробка має форму прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 2 дм, 3 дм, 5 дм. Укажіть, які з поданих тверджень правильні, а які — неправильні:
      а) в коробці може вміститися 30 кубів, ребро яких дорівнює 1 дм;
      б) коробка займає об'єм, який менший об'єму куба з ребром 4 дм;
      в) в коробці може вміститися 50 кубів з ребром 1 дм;
      г) дана коробка рівновелика кубу з ребром 3 дм.
   4) У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Діагональ основи утворює зі стороною основи кут β. Укажіть, які з поданих тверджень правильні, а які — неправильні:
      а) висота паралелепіпеда дорівнює $d\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
      б) діагональ основи паралелепіпеда дорівнює $d \cos \alpha$;
      в) сторони основи паралелепіпеда дорівнюють $d \cos\alpha \sin\beta$ і $d \cos\alpha \cos\beta$;
      г) площа основи паралелепіпеда дорівнює $d^2 \cos^2 \alpha \sin 2\beta$;
      д) об'єм паралелепіпеда дорівнює $\frac{1}{4} d^3 \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1. Теорема про об'єм піраміди

Доведення теореми про об'єм піраміди можна провести у відповідності до п. 69, 70 § 7 підручника. Але враховуючи, що учні з курсу алгебри і початків аналізу знайомі із загальною формулою $V = \int_a^b S(x)dx$ для обчислення об'ємів тіл, можна довести теорему про об'єм піраміди по-іншому.

Т е о р е м а

Об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту, тобто $V = \frac{1}{3} SH$, де S — площа основи піраміди, H — її висота.

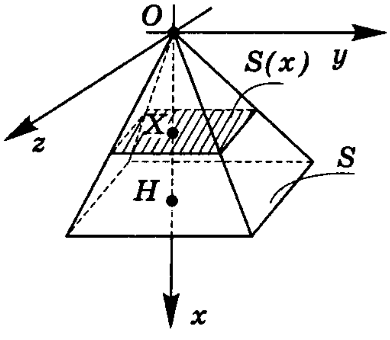

Рис. 153

Доведення

Нехай дано піраміду, площа основи якої *S*, а висота *H* (рис. 153).

Введемо систему координат так, щоб вершина піраміди була початком координат, а вісь *Ox* направимо перпендикулярно до основи піраміди.

Кожна січна площина, яка перпендикулярна до осі *Ox,* перетинає піраміду по многокутнику, який подібний основі призми. Площу одержаного перерізу позначимо через *S(x).* Тоді $\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2}$ звідси $S(x) = \frac{S}{H^2}x^2$.

Використовуючи формулу $V=\int_a^b S(x)dx$ для обчислення об'єму тіла при $a = 0$; $b = H$, одержимо: $V=\int_0^H S(x)dx = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H =$

$= \frac{S}{H^2}\cdot\left(\frac{H^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH$.

Теорему доведено.

Розв'язування задач

1. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 3 см, бічне ребро — 5 см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* 32 см^3.*)*
2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, висота піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* 24 см^3.*)*
3. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, висота — 4 см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* $9\sqrt{3}$ см^3.*)*

Знаходження об'єму піраміди

Розв'язування задач

4. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює Q**,** бічна поверхня — *S.* Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай *a* — довжина сторони основи, тоді $a^2 = Q$; $2al = S$, де *l* — апофема, $l=\frac{S}{2a}$. Знайдемо висоту *H* піраміди:

$$H = \sqrt{l^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4a^2}-\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{S^2}{4Q}-\frac{Q}{4}} = \sqrt{\frac{S^2-Q^2}{4Q}} = \frac{\sqrt{S^2-Q^2}}{2\sqrt{Q}}.$$

Об'єм *V* дорівнює: $V = \frac{1}{3}S_{осн}H = \frac{1}{3}Q\frac{\sqrt{S^2-Q^2}}{2\sqrt{Q}} = \frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2-Q^2\right)}$.

Відповідь. $\frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2-Q^2\right)}$.

5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює *a*, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

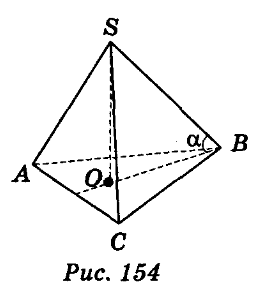

Рис. 154

Р о з в ' я з а н н я

Нехай *SABC* — правильна піраміда (рис. 154), в якій AB = *BC* = AC = *a;* $SO \perp (ABC)$; $\angle SBO = a$. Площа основи S_1 =

$\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, OB — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, тому $0B = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далі із ΔSOB $SO = OB\ tg\angle SBO = \frac{a}{\sqrt{3}}\text{tg}\alpha$. Отже, шуканий об'єм V дорівнює: $V = \frac{1}{3}\ S_1 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}\text{tg}\ \alpha = \frac{a^3 tg\alpha}{12}$.

Відповідь. $\frac{a^3 tg\alpha}{12}$.

6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює *H,* а бічна грань утворює з основою кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай *SABCD* — правильна чотирикутна піраміда (рис. 155), в якій $SO \perp (ABC)$, $SO = H$. Проведемо $OK \perp DC$, за теоремою протри перпендикуляри маємо: $SK \perp CD$; отже, $\angle SKO = \alpha$.

Із ΔSKO $OK = OS$ ctg $\angle SKO = H$ ctg α.

Оскільки $AD = 2 \cdot OK$, то одержуємо: $AD = 2H ctg\alpha$. Тоді площа основи $S_1 = AD^2 = 4H^2\ \text{ctg}^2\alpha$. Отже, шуканий об'єм

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot OS = \frac{1}{3}\ H^2\ ctg^2\alpha \cdot H = \frac{4}{3}H^3\ \text{ctg}^2\ \alpha.$$

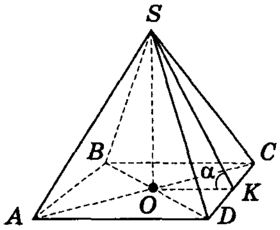

Рис. 155

Відповідь. $\frac{4}{3}H^3\ \text{ctg}^2\ \alpha$.

7. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, дорівнюють *h* і нахилені до основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай *SABCD* — дана піраміда (рис. 156); *ABCD* — ромб, $\angle BAD = \alpha$; $SO \perp (ABC)$.

Проведемо $MN \perp BA$, $LK \perp BC$, тоді $SM \perp AB$, $SK \perp BC$, $SN \perp DC$, $SL \perp AD$ (за теоремою про три перпендикуляри), і, отже, $SM = SK = SN = SZ, = h$, $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO = \angle SLO = \beta$. Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, то точка O — центр кола, вписаного в ромб *ABCD.*

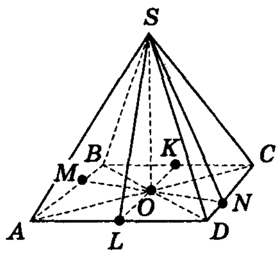

Рис. 156

Із ΔSLO $SO = SL \sin\angle SLO = h \sin\beta$;

$LO = SL \cos\angle SLO = h\cos\beta$.

Враховуємо, що $LK = 2h\cos\beta$. Сторона ромба $AB = \frac{LK}{\sin\angle BAD} = \frac{2h\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Отже, $S_1 = AB \cdot LK = \frac{2h\cos\beta}{\sin\alpha} \cdot 2h\cos\beta = \frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha}$.

Тоді $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot H = \frac{1}{3}S_1 \cdot SO = \frac{1}{3}\frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha}h\ sin\beta = \frac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

Відповідь. $\frac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

III. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

1) Чому дорівнює об'єм будь-якої піраміди?
2) Запишіть формулу для обчислення об'єму піраміди.
3) Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту збільшити в *n* раз, а сторону зменшити у стільки ж раз?
4) Чи рівновеликі дві піраміди з рівними висотами, якщо їх основами є чотирикутники з відповідно рівними сторонами?