

ЛЕКЦІЯ № 1

Тема заняття. Об'єм похилого паралелепіпеда. Об'єм призми.

Мета заняття: формування поняття об'єму; вивчення основних властивостей об'ємів; виведення формули для об'єму прямокутного паралелепіпеда; формування вміння знаходити об'єм прямокутного паралелепіпеда. Формувати уміння знаходити об'єми призми; розвивати просторову уяву, увагу, пам'ять, логічне мислення; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Обладнання: моделі прямокутного паралелепіпеда.

I. Перевірка домашнього завдання

1. Перевірити наявність виконаного домашнього завдання та відповісти на запитання, які виникли в студентів при виконанні задач.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1) Теоретична частина

Об'єм, основні властивості об'ємів

Кожне геометричне тіло займає частину простору.

Об'ємом геометричного тіла будемо називати додатне число, яке характеризує частину простору, що займає геометричне тіло, і задовольняє таким умовам:

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.
2. Якщо тіло розбите на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.
3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини, називають **одиничним**.

Об'єм одиничного куба приймають за одиницю об'єму, називаючи таку одиницю кубічною.

Наприклад: кубічний сантиметр — це об'єм куба, ребро якого дорівнює 1 см (рис. 142).

2) Практична частина

Виконання вправ:

Поясніть, що таке:

- а) 1 кубічний кілометр;
- б) 1 кубічний метр;
- в) 1 кубічний дециметр;
- г) 1 кубічний міліметр.

Одиниці об'єму записують скорочено:

1 кубічний кілометр = 1 куб. км = 1 км^3 ;

1 кубічний метр = 1 куб. м = 1 м^3 ;

1 кубічний сантиметр = 1 куб. см = 1 см^3 ;

1 кубічний дециметр = 1 куб. дм = 1 дм^3 ;

1 кубічний міліметр = 1 куб. мм = 1 мм^3 .

Одиниця об'єму 1 дм^3 має й іншу назву — 1 літр. Співвідношення між цими величинами подано нижче:

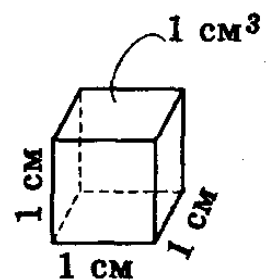


Рис. 142

$$1 \begin{matrix} \text{см}^3 \\ \text{дм}^3 \\ \text{м}^3 \end{matrix} = 10^3 \begin{matrix} \text{мм}^3 \\ \text{см}^3 \\ \text{дм}^3 \end{matrix} \quad 1 \text{ км}^3 = (10^3)^3 \text{ м}^3.$$

Виміряти об'єм, геометричного тіла — значить знайти число, яке показує, скільки одиничних кубів міститься в даному тілі.

На рис. 143 показано тіла, складені з кубів із ребром 1 см, їх об'єми дорівнюють по 6 см³.

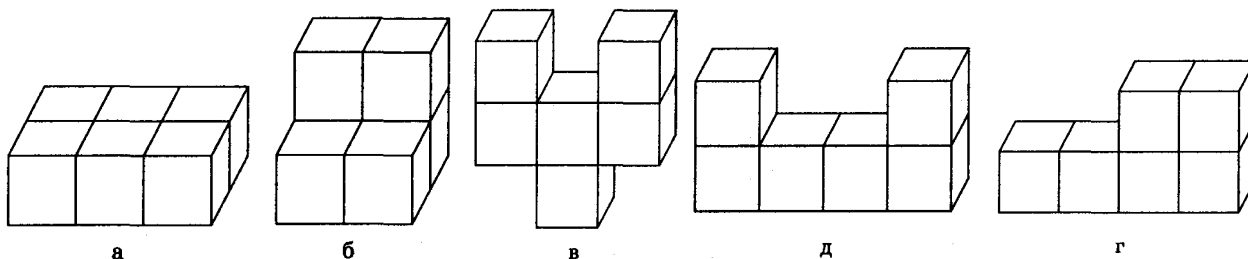


Рис. 143

Тіла, які мають рівні об'єми, називаються **рівновеликими**. На рис. 143 тіла а—д рівновеликі.

Ми будемо далі розглядати лише **прості тіла** — тіла, які можна розбити на скінчене число трикутних пірамід.

Розв'язування задач

1. Два тіла рівні. Чи рівновеликі вони?

2. Два тіла рівновеликі. Чи рівні вони?

Формула для об'єму прямокутного паралелепіпеда

1. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто якщо a , b , c — лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм V обчислюється за формулою $V = abc$.

Наслідок 1. Об'єм куба дорівнює кубу його ребра: $V = a^3$, де a — довжина ребра куба.

Наслідок 2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на висоту.

Оскільки $ab = S$, $c = h$, то $V = Sh$.

Наслідок 3. У прямокутного паралелепіпеда будь-яку грань можна вважати основою.

Об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.

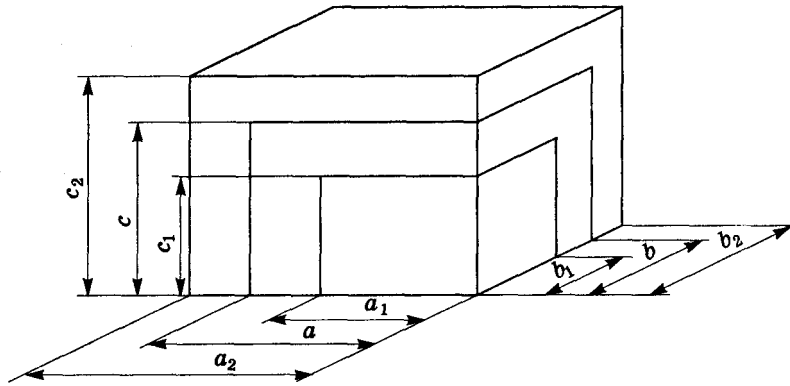


Рис. 147

Розв'язування задач

1. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює 5 см. (Відповідь. 125 см^3 .)
2. Знайдіть об'єм куба, якщо площа повної поверхні дорівнює 150 см^2 . (Відповідь. 125 см^3 .)
3. Об'єм куба дорівнює 8 см^3 . Знайдіть площу повної поверхні куба. (Відповідь. 24 см^2 .)
4. Знайдіть об'єм куба, діагональ якого дорівнює d . (Відповідь. $\frac{d^3 \sqrt{3}}{9}$)
5. Знайдіть об'єм куба, площа грані якого дорівнює Q . (Відповідь. $Q\sqrt{Q}$.)
6. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см^2 , 6 см^2 , 9 см^2 . Знайдіть його об'єм. (Відповідь. 18 см^3 .)

Розв'язування задач

1. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб зі стороною 10 см і гострим кутом 30° . Висота паралелепіпеда — 5 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь. 250 см^3 .)
2. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 і 8 см, а бічне ребро 10 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь. 240 см^3 .)
3. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 і $\sqrt{18}$ см і утворюють кут 45° , а менша діагональ паралелепіпеда утворює кут 45° з площиною основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь. 105 см^3 .)
4. Сторони основи похилого паралелепіпеда дорівнюють 6 і 12 см і утворюють кут 60° . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 14 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь. $252\sqrt{3} \text{ см}^3$.)

Розв'язування задач

1. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб із більшою діагоналлю d . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β , а менша — кут α . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання

Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — паралелепіпед (рис. 151), $AA_1 \perp (ABC)$, $ABCD$ — ромб, $BD > AC$, $BD = d$.

Ортогональними проекціями діагоналей $A_1 C$ і $B_1 D$ на площину основи є відповідно діагоналі AC і BD ромба. Оскільки в прямокутних трикутниках $AA_1 C$ ($\angle A = 90^\circ$) і $B_1 B D$ ($\angle B = 90^\circ$) катети $A_1 A$ і $B_1 B$ рівні, а $BD > AC$, то діагональ $B_1 D$ більша, а $A_1 C$ — менша. Отже, $\angle B_1 D B = \beta$, $\angle A_1 C A = \alpha$.

$$V = SH.$$

Із ΔB_1BD $BB_1 = H = BD \operatorname{tg} \angle D = d \operatorname{tg} \beta$.

Із ΔA_1AC $AC = AA_1 \operatorname{ctg} \angle C = H \operatorname{ctg} \alpha = d \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha$.

$$\text{Тоді } S = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} d \cdot d \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

$$V = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta \cdot d \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} d^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} d^3 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta$.

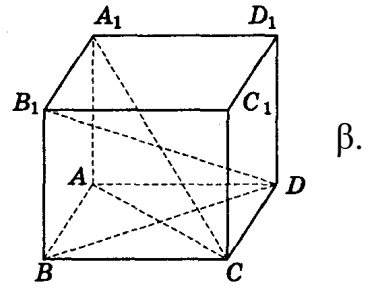


Рис. 151

2. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a , кут між площинами двох суміжних бічних граней дорівнює φ ($\varphi < 90^\circ$), більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (*Відповідь.* $2a^3 \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \beta$.)

2. Об'єм призми

Доведення теореми про об'єм призми рекомендується провести згідно з п. 68 § 7 підручника.

Розв'язування задач

1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 і 8 см. Висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь.* 240 см^3 .)
2. В основі прямої призми лежить трикутник, сторона якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї — 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 8 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь.* 240 см^3 .)
3. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї — 8 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 10 см. (*Відповідь.* 480 см^3 .)
4. В основі прямої призми лежить трапеція з основами 9 і 15 см і висотою 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см. (*Відповідь.* 600 см^3 .)
5. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь.* 300 см^3 .)
6. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні і мають площі 24 см^2 і 30 см^2 . Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь.* 60 см^3 .)

III. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

- 1) Сформулюйте основні властивості об'єму.
- 2) Що таке 1 см^3 ; 1 м^3 ; 1 мм^3 ; 1 дм^3 ; 1 км^3 ?
- 3) Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда?
- 4) Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 6 см, 9 см, 7 см. (*Відповідь.* 378 см^3 .)
- 5) Як знайти об'єм довільного паралелепіпеда? Запишіть формулу для знаходження об'єму паралелепіпеда.
- 6) Кожне ребро похилого паралелепіпеда має довжину 1 см. Бічне ребро утворює з основою кут 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо гострий кут основи також

дорівнює 60° . (Відповідь. $\frac{3}{4} \text{ см}^3$.)

7) дорівнює об'єм довільної призми?

8) Запишіть формулу для знаходження об'єму призми.

9) Чому дорівнює об'єм похилої призми?

10) В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гострим кутом ρ (рис. 152). Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу, дорівнює a і утворює з площиною основи кут α . Укажіть, які з наведених тверджень правильні, а які — неправильні:

а) висота призми дорівнює $d \cos \alpha$;

б) гіпотенуза основи дорівнює $d \cos \alpha$;

в) катет, прилеглий до кута β , дорівнює $d \sin \alpha \cos \beta$;

г) площа основи дорівнює $\frac{1}{4} d^2 \cos^2 \alpha \sin 2\beta$;

д) об'єм призми дорівнює $\frac{1}{4} d^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin 2\beta$.

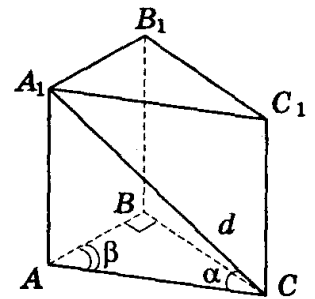


Рис. 152