

МЕТОДИЧНЕ ОБ'ЄДНАННЯ ВИКЛАДАЧІВ МАТЕМАТИКИ  
ВНЗ I-II РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ ЛЬВІВСЬКОЇ ОБЛАСТІ  
Львівський коледж Державного університету телекомунікацій

***ЗБІРНИК***  
*завдань для підготовки студентів*  
*до обласної олімпіади*  
*з МАТЕМАТИКИ*

Укладач:  
***Лящук Б.А.***

Львів – 2016

## Розділ 1. Раціональні та ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи

❖ Розв'язати рівняння:

$$1. \frac{2}{x^2-3x+4} - \frac{3}{x^2-3x-1} = 2.$$

$$2. (x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2.$$

$$3. x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

$$4. x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$5. 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$6. x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 40.$$

$$7. \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}.$$

$$8. (x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81.$$

$$9. (x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82.$$

$$10. \frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6.$$

$$11. \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6.$$

$$12. \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} = 5.$$

$$13. \sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = 2,5.$$

$$14. (\sqrt{3} + \sqrt{8})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{8})^x = 6.$$

$$15. (\sqrt[7]{6 - \sqrt{35}})^x + (\sqrt[7]{6 + \sqrt{35}})^x = 2.$$

$$16. \sqrt[3]{9x^2 - 49} + 2 \cdot \sqrt[3]{(3x + 7)^2} = \sqrt[3]{(3x - 7)^2}.$$

$$17. \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$$

❖ Розв'язати нерівності:

$$18. \frac{3}{6x^2-x-12} < \frac{25x-47}{10x-15} - \frac{3}{3x+4}.$$

$$19. \frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^2}.$$

$$20. \sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{25 - x(10 - x)} > 15.$$

$$21. \sqrt{x(x + 6) + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} > 1.$$

$$22. \sqrt{3x + 9} - 4\sqrt{3x + 5} + \sqrt{3x + 14} - 6\sqrt{3x + 5} \leq 1.$$

$$23. \frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2^4 \sqrt{\frac{12x}{x-2}} > 0.$$

$$24. \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} \leq 3,5.$$

❖ Розв'язати системи рівнянь:

$$25. \begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} xy + xz = 18, \\ xy + yz = 28, \\ xz + yz = 30. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x^2 + 2y = 7, \\ y^2 + 4z = -7, \\ z^2 + 6x = -14. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x + y + z = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 + xy - xz = 6, \\ xy + y^2 - yz = 6, \\ xz + yz - z^2 = 3. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 2xy + yz = 27, \\ 3yz - 2zx = 25, \\ zx - xy = 4. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} xy + yz = 3, \\ yz + zx = 10, \\ zx + xy = 9. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} \frac{3}{xy} + \frac{15}{yz} = 2, \\ \frac{5}{xz} + \frac{15}{yz} = 2, \\ \frac{3}{xy} + \frac{5}{xz} = 2. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz - yz = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} = 5, \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} = 4. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

## Розділ 2. Спрощення, обчислення, доведення

❖ Обчислити значення виразів:

$$1. \left( \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} \right) \left( \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right), \text{ при } x+y+z=0,$$

$$(x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, x \neq y, x \neq z, y \neq z).$$

$$2. \frac{(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$3. \sqrt{x^2 + 2 + 2\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 + 2 - 2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$4. \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}.$$

$$5. \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

$$6. \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}.$$

$$7. \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}.$$

$$8. \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

$$9. \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} \cdot \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

$$10. \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}} - \sqrt{3}.$$

❖ Спростити вирази:

$$11. \frac{4x+|x|}{3x-|x|} + \frac{x-4|x|}{5x+|x|}.$$

$$12. \frac{(a-b)^3(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{-3} + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}.$$

$$13. \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{a}{\sqrt{2}}} + 2 - \frac{a^2\sqrt{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}.$$

$$14. \sqrt{\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}}, \text{ при } x = \sqrt{ab}.$$

$$15. \frac{a+b}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \cdot \left( \frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2}-1} + \frac{4ab\sqrt{a}+9ab\sqrt{b}-9b^2\sqrt{a}}{\frac{3}{2}\sqrt{b}-2\sqrt{a}} \right), a>b>0.$$

$$16. \sqrt{x-3\sqrt{x-4}} - \sqrt{9+\sqrt{4-x}}.$$

$$17. \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}, \text{ якщо } abc=1.$$

$$18. \left( \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}-x+1} \right) : \sqrt{x^2-1}.$$

$$19. \frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}} - \frac{8ab}{a^2-4b^2} + \frac{ab}{a-2b}, \text{ якщо } 0<a<2b.$$

$$20. \sqrt{10} \left( \sqrt{6-\sqrt{35}} - \sqrt{6+\sqrt{35}} \right).$$

$$21. \sqrt{29-12\sqrt{5}} - \sqrt{29+12\sqrt{5}}.$$

22. Знайти суму  $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{15-x^2}$ , якщо відомо, що різниця  $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{15-x^2} = 2$  (значення  $x$  знаходити не треба).

23. Обчислити суму кубів двох чисел, якщо їх сума і добуток дорівнюють відповідно 11 і 21.

24. Числа  $a, b, c$  такі, що  $a+b+c=2013$ ,  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{671}$ .

Знайти значення виразу  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ .

### Розділ 3. Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи

❖ Спрощення, обчислення, доведення:

$$1. \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6} \cdot \dots \cdot \log_{\frac{1}{99}} \frac{1}{100} \cdot \lg 2.$$

$$2. 0,2^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\right)}.$$

3. Дано  $\log_{ab} a = 9$ . Знайти  $\log_{ab} b$ .

4. Знайти нулі функції  $y = \ln^2(x^2 - 3x - 9) + \sqrt{x^2 - 8x - 8}$ .

5. Знайти область значення функції  $f(x) = \frac{1}{3^{2^x-1}}$ .

6. Знайти область визначення функції  $f(x) = \sqrt{\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15)}$ .

7. Знайти область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{(x-1)^2 \cdot (x+6)^2}{\log_{0,5}(x^2+3)}}$ .

❖ Розв'язати рівняння:

8.  $\sqrt{\log_2^2(2-x)} - \sqrt{\log_2^2(x-1)} = 2$ .

9.  $\log_2(x-1)^4 - 4\log_2(x+2) = 8$ .

10.  $\log_2(2^x - 8) \cdot \log_2(2^{x+1} - 16) = 12$ .

11.  $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$ .

12.  $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$

13.  $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$ .

14.  $3^{\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \log_3 x^4 + \dots + \log_3 x^8} = 25x^{34}$ .

❖ Розв'язати нерівності:

15.  $(2 - \sqrt{3})^{|x|-1} - 3(2 + \sqrt{3})^{|x|-1} + 2 \leq 0$ .

16.  $(3 - x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$ .

17.  $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$ .

18.  $\frac{4^x+5}{2^{x+1}-1} \geq 3$ .

19.  $4^{2+\sqrt{x-1}} + 3 \cdot 2^{2+\sqrt{x-1}} - 16 < 15 \cdot 4^{\sqrt{x-1}} + 2^{3+\sqrt{x-1}} + 5 \cdot 2^{1+\sqrt{x-1}}$

20.  $12^x + 5^x > 13^x$ .

21.  $3^{\lg x+2} < 3^{\lg x^2+5} - 2$ .

22.  $2^{\log_3 x^2} - 2^{\log_3(-x)+2} + 4 \leq 0$ .

23.  $\frac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a^2 x} > 1$ .

24.  $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17$ .

25.  $x^{0,5\log_{0,5} x-3} \geq 0,5^{3-2,5\log_{0,5} x}$ .

26.  $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$ .

27.  $\log_3 x \cdot \log_{3x} 3 \cdot \log_3(81x) \leq 1$ .

28.  $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) > 0$ .

29.  $\lg^2 \sqrt{x} - 3\lg \sqrt{x} + 2 < 0$ .

30.  $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2\log_9 7$ .

31.  $\lg^2 100x - 7\lg x \geq 8$ .

32.  $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$ .

$$33. \sqrt{5x - x^2 - 4} \cdot \log_{\sin x}(1 + \sqrt{2}) < 0.$$

$$34. 2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x} > 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}.$$

$$35. 0,3^{\log_2(\log_3(x^2-19))^{-2}} > 1.$$

$$36. \log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 1.$$

❖ Розв'язати системи рівнянь:

$$37. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 5^{2x} \cdot 3^y = 675, \\ \log_{3\sqrt{2}}(x + y) = 64. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \sqrt{3x - 2y} = \sqrt{5 + x - 3y}. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt[5]{2^y} = \sqrt[x]{128}, \\ \lg(x + 9) = \lg 40 - \lg(x - y). \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x^{x+y} = x^4 y^2, \\ y^{x+y} = x^2 y^4. \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \sqrt{2y - 3x} = \sqrt{4 - 4x + y}. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} x^{-y} \sqrt{x + y} = 2\sqrt{3}, \\ (x + y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} 2^x \cdot (x + y) = 36, \\ \sqrt[x]{x + y} = 3. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32 \sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3 \sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$$

❖ Побудувати графік функції:

$$46. f(x) = \frac{\sqrt{\log_2^2 x}}{\log_2 x}.$$

$$47. y = 2^{|x-1| + (\sqrt{x+1})^2}.$$

$$48. y = (|x| - x)^0 \ln|x|.$$

❖ Завдання з параметрами:

49. Визначити найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = \log_3 \left( (a - 2)x^2 + 2\sqrt{2}x + a + 2 \right)$  визначена на множині всіх дійсних чисел.
50. За якого найменшого значення параметра  $a$ , функція  $f(x) = \lg(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$  буде непарною?
51. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $y = f(x + a)$  є парною, якщо  $f(x) = 2^x + \frac{4}{2^x}$ .

#### Розділ 4. Тригонометричні функції, рівняння та нерівності

❖ Обчислити вирази:

- $\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{4\pi}{21} + \cos \frac{6\pi}{21} + \cos \frac{8\pi}{21} + \dots + \cos \frac{20\pi}{21}$ .
- $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \cos \frac{7\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19}$ .
- $\cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$ .
- $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{32} + 2\operatorname{tg} \frac{3\pi}{16} + 4\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{32}$ .
- Спростити  $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha}$ .
- Визначити найменше додатне значення  $\alpha + \beta$ , якщо  $\operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{3}$  і  $\operatorname{tg} \frac{\pi\beta}{3}$  є різними коренями квадратного рівняння  $x^2 + (1 - \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 2$ .
- Обчислити  $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$ .
- Довести тотожність  $\frac{3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$ .
- При яких значеннях параметра  $a$  число  $\pi$  є періодом функції  $y = \frac{\sin x}{a - \cos x}$ .
- Скільки різних цілих значень набуває функція  $y = \sqrt{8(\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2 \sin 2x \cos 2x)}$ ?
- Знайти область визначення функції  $y = \arcsin \frac{x-4}{x}$ .
- Знайти область визначення функції  $y = \arccos \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$ .
- Знайти область визначення функції:  
$$y = \arcsin \frac{x-5}{6} - \lg(x^2 - 10x + 24)$$
.
- Знайти область значення функції  $y = 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$ .
- Знайти область значення функції  $y = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$ .
- Знайти множину значень функції  $f(x) = \cos x + \sqrt{-\cos^2 3x}$ .



❖ Розв'язати рівняння:

17.  $4^{\sin x} + 4^{\cos x} = 2^{\sin x + \cos x + 1}$ .

18.  $\operatorname{ctg} x = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ .

19.  $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos 3x = 0$ .

20.  $\log_{0,5 \sin 2x} \sin x = 0,5$

❖ Розв'язати нерівності:

21.  $\sqrt{18x - x^2} > \lg(\sin x)$ .

22. Розв'язати нерівність  $\arcsin \frac{1}{x} + \arccos \frac{1}{x} < 2$ . У відповідь записати найменший додатний розв'язок нерівності.

❖ Розв'язати системи рівнянь:

23. 
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

24. 
$$\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5. \end{cases}$$

❖ Побудувати графік функції:

25.  $y = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}$ .

26.  $y = \arcsin(\sin x)$ .

27.  $y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x$ .

28.  $y = \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1 - x}$ .

29.  $y = \frac{|x|}{x} - 2 \sin|x| \cdot \sin x$ .

30.  $y = \log_2(\sin x \cos x)$ .

31.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\cos x|}$ .

❖ Побудувати графік рівняння:

32.  $\cos(\pi(x^2 + y^2)) = -1$ .

33.  $\sin \pi x = \cos \pi y$ .

## Розділ 5. Алгебраїчні рівняння, нерівності та системи з модулями та параметрами

❖ Розв'язати рівняння:

1.  $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| - 9 = 0$ .

2.  $||x + 3| - 2| + ||x - 2| - 3| = 4$ .

❖ Розв'язати нерівності:

3.  $||x + 5| - |x - 3|| \leq 4$ .

4.  $||2x - 8| - 3|x + 2|| \leq 10$ .

5.  $||x - 1| + |2 - x|| > 3 + x$ .

❖ Розв'язати системи рівнянь:

6. 
$$\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0, \\ 2x - |y| - 7 = 0. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} |x + y|^{x^2 + 3x + 2y - 6} = 1, \\ x + |y| = 0. \end{cases}$$

8. При яких  $a \in R$  система рівнянь 
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + z = 5, \\ x + 2y + az = 1. \end{cases}$$
 має розв'язки?

9. При яких значеннях  $x$  функція  $y = |x - 1| + |x - 3|$  набуває найменшого значення? Знайти ці значення функції.

❖ Побудувати графік функції

10.  $y = ||x - 1| - x|$

11.  $y = \sqrt{(x + 2)^2} + \sqrt{(x - 2)^2}$ .

12.  $y = \frac{\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 2|}{2}$ .

## Розділ 6. Похідна та її застосування

1. Знайти критичні точки функції  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\cos x - \sin x) - \log_{\frac{1}{3}} 5$ .

2. При яких  $a$  сума квадратів коренів рівняння  $x^2 + x\sqrt{a^2 - 6a} - a - 4 = 0$  найменша?

3. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремумів функції  $y = \frac{(3x-2)^2}{(1-x)^3}$ .

4. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремумів функції  $y = (11 + x - x^2)e^{-x}$ .

5. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $y = 3(a + 1)x^5 - 20x^3 + 15(a + 2)x - 4$  монотонна на множині  $R$ ?

6. Обчислити найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = ax^3 + 2x^2 - x + 10$  спадає на всій числовій осі.

7. Обчислити найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = e^{ax} + ax$  зростає на всій числовій осі.

8. Обчислити найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = x^3 + ax^2 + x + 1$  зростає на всій числовій осі.
9. Довести, що функція  $y = x + \frac{1}{1+x^2}$  зростає на всій числовій осі.
10. Розв'язати нерівність  $f'(x) < g'(x)$ , якщо  $f(x) = x + 3 \ln(x - 2)$ ;  $g(x) = 5 + \ln(x - 1)$ .
11. Знайти додатне число, куб якого перевищує потрійний його квадрат на мінімальне значення.
12. Дослідити на монотонність та екстремум функцію  $y = x + \ln(x^2 - 4)$ .
13. Знайти додатне число, сума якого зі своєю оберненою величиною мала би найменше значення.
14. Знайти найменше та найбільше значення функції  $y = 5^{3x} - 6 \cdot 5^{2x} + 9 \cdot 5^x$  на відрізку  $[-1; 1]$ .
15. Знайти найбільше  $M$  та найменше  $m$  значення функції  $f(x) = x^3 - 2x|x - 2|$  на відрізку  $[0; 3]$ .
16. Використовуючи графік функції  $f(x) = x^3 - 27x$  знайти найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $x^3 - 27x = a$  має три різні корені.
17. Знайти кут між дотичними до графіка функції  $f(x) = x^3 - x$  в точках з абсцисами  $-1$  і  $0$ .
18. При якому значенні параметра  $a > 0$  параболи  $y = 3x^2 - 12x + 15$  і  $y = -2x^2 - 8ax + 1$  мають спільну дотичну, паралельну до осі абсцис?
19. Знайти квадрат відстані між точками графіка функції  $y = \frac{x^2}{x-2}$ , в яких дотичні до цього графіка є паралельні до осі абсцис.
20. Визначити ординату точки перетину з віссю ординат дотичної до кривої  $y = x^2 + 2x - 2$ , яка паралельна прямій  $4x - y - 7 = 0$ .
21. До кривої  $y = -x^2 + 6x$  з точки  $M(3; 10)$  проведені дві дотичні. Знайти кут між дотичними та площу трикутника, утвореного цими дотичними та віссю  $Ox$ .
22. Прямокутна рамка для фотографії шириною полів  $2$  см і  $4$  см має площу  $200$  см<sup>2</sup>. Фото з якою найбільшою площею можна помістити в цій рамці?

23. При якому значенні параметра  $a$  відстань між вершинами парабол  $y = 2x^2 + 8x + 3$  і  $y = x^2 + 2ax + 1 - a^2$  є найменшою?
24. Треба виготовити відкритий циліндричний резервуар об'ємом  $V$ . Вартість матеріалу, який іде на виготовлення дна, у  $m$  разів більша за вартість матеріалу для бічної частини. При яких розмірах резервуара вартість матеріалу буде найменшою?
25. Визначити суму координат точки, яка лежить на прямій  $y = \frac{2}{3}x + 5$ , якщо різниця квадратів абсциси й ординати точки є найменшою.
26. Визначити абсцису точки на прямій  $y = 2x + 3$ , відстань до якої від заданої точки  $A(4;2)$  є найменшою.
27. Визначити значення параметра  $a$ , при якому сума квадратів коренів рівняння  $x^2 - 2ax - a - 2$  буде найменшою.
28. При якому значенні відношення радіуса кулі, описаної навколо конуса, до висоти конуса відношення об'єму конуса до об'єму кулі буде найбільшим?
29. У трикутник з основою 5 і висотою 6 вписано прямокутник найбільшої площі. Обчислити площу цього прямокутника, якщо дві його вершини лежать на основі трикутника.
30. Визначити точку мінімуму функції  $f(x) = \frac{(3x-5)(-25-x)}{(x+5)^2}$ .

## Розділ 7. Планіметрія

1. У середині правильного трикутника взято точку, яка віддалена від його сторін на 12, 17 і 10 см. Обчислити висоту трикутника.
2. Медіани трикутника задовольняють умові  $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$  ( $m_a, m_b, m_c$  – медіани трикутника). Визначити тип трикутника.
3. У прямокутний трикутник вписане коло. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки  $x$  і  $y$ . Довести, що площа трикутника  $S = xy$ .
4. Довести, що площу  $S$  прямокутного трикутника можна знайти за формулою  $S = p \cdot (p - c)$ , де  $p$  – півпериметр трикутника,  $c$  – довжина гіпотенузи.
5. Визначити кут в ромбі, якщо його площа дорівнює  $Q$ , а площа вписаного круга дорівнює  $S$ .

6. У прямокутнику ABCD сторона AB у три рази більша від сторони BC. У середині прямокутника лежить точка M, причому  $AM=\sqrt{2}$ ,  $BM=4\sqrt{2}$ ,  $DM=2$ . Знайти косинус кута BAM, і площу цього прямокутника.
7. Довжини сторін і діагоналей паралелограма дорівнюють відповідно  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $f$ . Знайти кути паралелограма, якщо  $a^4 + b^4 = c^2 f^2$ .
8. У паралелограмі проведено бісектриси всіх його кутів. Довести, що чотирикутник, утворений точками перетину бісектрис, є прямокутником, діагональ якого дорівнює різниці суміжних сторін паралелограма. Знайти площу цього прямокутника.
9. Довжини паралельних сторін трапеції дорівнюють відповідно 25см та 4 см, а довжини непаралельних сторін 20 см, і 13 см. Знайти площу трапеції.
10. Коло радіуса R вписане у рівнобічну трапецію. Верхня основа трапеції удвічі менша висоти трапеції. Знайти площу трапеції.
11. Знайти висоту прямокутної трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює більшій основі, площа трапеції дорівнює S, а гострий кут дорівнює  $\alpha$ .
12. Довести, що площа прямокутної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку її основ.
13. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа трапеції. Обчислити довжину діагоналі трапеції, якщо площа і висота трапеції відповідно дорівнюють 48 і 6.
14. У трапеції проведено діагоналі. Площі трикутників, які прилягають до її основ дорівнюють  $S_1$  та  $S_2$ . Довести, що площа цієї трапеції дорівнює  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ .
15. У трапеції ABCD діагоналі AC і BD перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо  $AC=12$  см, а середня лінія трапеції дорівнює 8 см.
16. Точки M і N – середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника ABCD ( $AD \neq BC$ ). Відомо, що  $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$ . Довести, що даний чотирикутник – трапеція.
17. Точки M і N – середини діагоналей AC і BD опуклого чотирикутника ABCD ( $AD > BC$ ). Відомо, що  $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$ . Довести, що даний чотирикутник – трапеція.

18. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники. Площі трьох з них дорівнюють  $S_1$ ,  $S_2$  та  $S_3$ . Знайти площу четвертого трикутника.
19. Діагоналі опуклого чотирикутника взаємно перпендикулярні. Довести, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін є рівні.
20. У колі, радіус якого дорівнює  $R$ , проведено дві хорди  $AB$  і  $CD$ , які перетинаються під прямим кутом. Довести, що  $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ .
21. Трапеція  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) вписана в коло. Точка  $O$  – центр цього кола. Знайти площу трапеції, якщо  $\angle BOA = 60^\circ$ , а висота трапеції дорівнює  $h$ .

## Розділ 8. Евристичні задачі

1. За круглим столом сидять 30 студентів. Кожен з них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 студентів сказали, що рівно один з їхніх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди брехуни. Скільки брехунів сидить за столом?
2. Є 26 однакових монет, серед яких одна фальшива (легша). Як за допомогою трьох зважувань на терезах без гирьок визначити легшу монету?
3. Є п'ять монет, серед яких одна фальшива (невідомо легша вона чи ні). Маса справжньої монети 5 г. Як за допомогою двох зважувань на терезах можна виявити фальшиву монету, маючи одну гирю масою 5 г?
4. Є два сплави золота і срібла. В одному сплаві кількості цих металів знаходяться у відношенні 1:2, а в другому – 2:3. Скільки грамів треба взяти від кожного сплаву, щоб одержати 19 г сплаву, в якому золото і срібло знаходяться у відношенні 7:12?
5. Учень прислав завдання, яке складається із 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому ставлять 8 балів, за кожну неправильно розв'язану – мінус 5 балів, за задачу, яку він не брався розв'язувати – 0 балів. Учень одержав у сумі 13 балів. Скільки задач він брався розв'язувати?
6. Сім'я вночі підійшла до мосту. Тато може його перейти за 1 хвилину, мама – за 2 хв., син – 5 хв., а бабуся за 10 хв. Вони

мають один ліхтарик. Міст витримує тільки двох людей. Як їм перейти міст за 17 хв.? Якщо переходять двоє, то вони йдуть меншою із їх швидкостей. Рухатися по мосту без ліхтарика їм не можна.

7. Знайти двозначне число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за їх подвоєний добуток на 5.
8. Вологість повітря до полудня знизилась на 12% порівняно з ранком, а до вечора ще й на 5% порівняно з полуднем. Скільки відсотків від ранкової вологості складає вологість повітря ввечері і на скільки відсотків вона знизилася?
9. У тридев'ятому королівстві кожні два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, з якого в будь-яке інше можна проїхати не більше як двома дорогами.
10. У ящику лежать 111 кульок червоного, синього, зеленого і білого кольорів. Якщо, не заглядаючи в ящик, витягти 100 кульок, то серед них обов'язково знайдуться 4 кульки різних кольорів. Яку найменшу кількість кульок потрібно витягнути, не заглядаючи в ящик, щоби серед них обов'язково знайшлися три кульки різних кольорів?
11. На скільки відсотків потрібно збільшити довжину радіуса круга, щоби його площа стала більшою на 96%?
12. Довести, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може бути повним квадратом.
13. Скількома способами суму 4 грн.96коп. можна сплатити монетами номіналом 2 та 25 коп.?
14. Скількома способами суму 4 грн.96коп. можна сплатити монетами номіналом 2 та 15 коп.?
15. Знайти чотирицифрове число за наступними умовами: сума квадратів крайніх цифр дорівнює 13; сума квадратів середніх цифр дорівнює 85; якщо від шуканого числа відняти 1089, то отримаємо число, записане тими ж цифрами, що і шукане, але у зворотному порядку.
16. Довести, що  $2^{2011} + 3^{2011}$  ділиться на 5.
17. Якою цифрою закінчується число  $99^{99}$ ?
18. Знайти всі натуральні числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , для яких виконується рівність  $105^x + 211^y = 106^z$ .

19. Одного разу студента запитали, скільки йому років. Оскільки студент добре знав математику, то він відповів так: «1 січня цього року мені виповнилося  $\left(-\log_2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64}\right)\right)$  років». Скільки років студентові?
20. Свіжі гриби за масою містять 90% води, а сухі – 15%. Скільки кілограмів сухих грибів можна отримали з 66 кг свіжих?
21. У шафі є 10 пар черевиків різних моделей. З них навмання вибирають 4 черевики. У скількох випадках серед вибраних черевиків будуть відсутні комплектні пари?
22. В аудиторії є 4 парти по 4 місця в кожній. Скількома способами можна розсадити групу з 7 студентів у цій аудиторії?
23. У лотереї розігруються 5 предметів. Перший, хто підійшов до урни, виймає з неї 5 білетів. Скількома способами він може їх вийняти, щоби три з них виявилися виграшними, якщо в урні 100 білетів.
24. У класі 38 учнів. З них 16 захоплюється математикою, 17 – фізикою, 18 – історією. Захоплюються двома предметами – математикою і фізикою – четверо, математикою й історією – троє, фізикою та історією – п'ятеро. Троє не захоплюються ні математикою, ні фізикою, ні історією. 1) Скільки учнів захоплюється одночасно трьома предметами? 2) Скільки учнів захоплюється лише одним із цих предметів?
25. Поїзд одну половину дороги пройшов зі швидкістю 45 км/год, а весь шлях – зі середньою швидкістю 49,5 км/год. З якою швидкістю (у км/год) проходив поїзд другу половину дороги?
26. Автомобіль проїхав першу половину дороги зі швидкістю 60 км/год. Шлях, що залишився, половину часу він їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу половину часу він їхав зі швидкістю 100 км/год. Знайти у кілометрах за годину середню швидкість руху автомобіля.
27. Чи можна з чотирнадцяти однакових паличок довжиною 7 см кожна скласти один метр?
28. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 4 дні, а другий – за 6 днів. Якось у неділю вони зустрілися у порту. Через скільки днів вони зустрінуться у порту в неділю наступного разу?