Міністерство освіти і науки України

Рада директорів ВНЗ I-II рівнів акредитації

Львівської області

ВСП Технічний коледж

Національного університету “Львівська політехніка”

Розв’язування задач є найбільш характерним

і своєрідним різновидом вільного мислення.

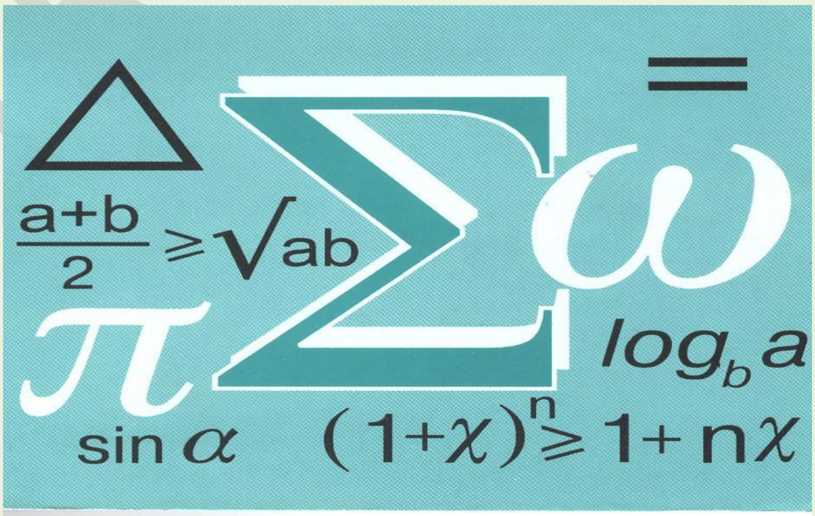
У. Джеймс

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

для підготовки до обласної студентської олімпіади

з

МАТЕМАТИКИ



ЛЬВІВ–2015

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ для підготовки до обласної студентської олімпіади з математики: – Львів: ВЦ ВСП-Технічний коледж НУ "Львівська політехніка", 2015. – Частина 1. – 16 с.

Упорядники:

канд. пед.н. **Васіна Л.С.,** канд.фіз.-мат.н. **Мохонько В.Д.,**

Данчишин І.П., Шеремет Х.Б., Бабич Л.П.

Рекомендовано до друку

цикловою комісією викладачів математики

Технічного коледжу НУ "Львівська політехніка"

Протокол №3 від 28.10.2015

РОЗДІЛ І
Раціональні та ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи

➔ *Розв'язати рівняння*:

1. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$ **2.** $4x^2+\dfrac{16x^2}{(x-2)^2}=20$

3. $(2x-1)(x-2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$ **4.** $(10x+9)^2(5x+4)(x+1)=3/5$

5. $20\cdot\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$ **6.** $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{18}{x^2}-3\cdot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{x}\right)=8$

7. $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x-3}{x}+...+\dfrac{1}{x}=2016$ **8.** $x^4+8x^3+18x^2+11x+2=0$

9. $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=6$ **10.** $(x+1,5)^4+(x-0,5)^4=82$

11. $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ **12.** $x^3+6x^2=2015-12x$

13. $\dfrac{\sqrt{4+x}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$ **14.** $\sqrt[2015]{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^{4030}}+\sqrt[2015]{x^2+1}=4-x^2$

15. $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$ **16.** $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1}$

17. $x^{2016}+2017^{2017}=x^{2017}+2017^{2016}$ **18.** $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}=x$

19. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-8-6\sqrt{x-1}}=1$ **20.** $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}=x^2-\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}$

21. $\dfrac{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{5-x}-\sqrt[4]{x-2}}=\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{5-x}{x-2}}$ **22.** $\sqrt[4]{x^2-8x+15}=6x-x^2-9$

23. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3$ **24.** $x=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

25. $\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+...+x^{10}\right)=\left(1+x+x^2+...+x^6\right)^2$

➔ *Розв'язати в цілих числах рівняння*:

26. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2015}$ **27.** $x^2+2x=y^2-2y+2017$ **28.** $y^2-xy-2x^2-2017=0$

29. Знайти всі пари (x,y) дійсних чисел, що задовольняють рівняння $x^4-2x^2y+3y^2-4xy+4x^2-8y+16=0$

30. Знайти всі додатні корені рівняння $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1=0$

➔ *Розв'язати систему*:

31. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \\ xyz=8 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} xy(x-1)(y-1)=72 \\ (x+1)(y+1)=20 \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} 4x^2+y^2+z^2=6 \\ 16x^3+y^3+2z^3=12 \\ 64x^4+y^4+4z^4=24 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{12}{7} \\ \frac{xz}{x+z}=\frac{15}{8} \\ \frac{yz}{y+z}=\frac{20}{9} \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} x^2-y^2+3y=0 \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x+y^2+z^3=3 \\ x^2+y^3+z=3, \\ x^3+y+z^2=3 \end{cases}$ $x,y,z>0$ **38.** $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2 \\ 4y^2-1=3y(x-1) \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} x^2-10y=-49 \\ y^2+6z=7 \\ z^2-2x=7 \end{cases}$

➔ *Розв'язати нерівність, систему нерівностей*:

40. $\sqrt{x^2-9x+20}\le\sqrt{x-1}\le\sqrt{x^2-13}$ **41.** $\frac{(x-2016)^2\sqrt{x^2-20x+99}}{256-x^2}\ge 0$

42. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}\ge\frac{7}{12}$ **43.** $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

44. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$ **45.** $\begin{cases} \sqrt{2x-1}<x \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}>\sqrt{6} \end{cases}$

РОЗДІЛ II
Спрощення, обчислення, доведення

1. Порівняти числа $\frac{2016^{2017}+1}{2016^{2016}+1}$ *та* $\frac{2016^{2016}+1}{2016^{2015}+1}$

2. Подати у вигляді добутку $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{2016}\right)^2-x^{2016}$

3. Порівняйте числа

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \quad \text{та} \quad \frac{4+\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}+\frac{4-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

4. Дійсні числа a і b задовольняють умову $a^2+b^2+ab+\sqrt{3}(a+b)=0$. Довести, що $a^2+b^2\le 3$

5. Довести, що $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2015}{2016}<\frac{1}{44}$

6. Спростити вираз $\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-2\right)^{1/2}$ і обчислити при $x=\frac{a^3+1}{a^3-1}$

7. Знайти значення виразу $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{c+b}+\frac{b}{a+c}$, якщо $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+c}=\frac{1}{504}$ та $a+b+c=2016$

8. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}$

9. Спростити $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

10. Довести, що якщо $a,b,c-$ довжини сторін деякого трикутника, то $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

11. Обчислити $\frac{a^4+a^3+a^2+9}{a^5-a^2-a+6}$, якщо $a^3+a=1$

12. Знайти всі трійки дійсних чисел x,y,z , які задовольняють рівності

$$x=\sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|},\quad y=\sqrt{\frac{z+1}{2}},\quad z=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

13. Знайти всі трійки дійсних чисел x,y,z , які задовольняють рівності

$$\sqrt{3z^2-2y-6z-5}=\sqrt{2x-y^2+z^2-7}-\sqrt{2y-x^2+z^2-12}$$

14. Спростити $\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}$

15. Спростити $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3b}-\sqrt[4]{b^3a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}+\frac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\right)^{1/2}$

16. Обчислити $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

17. Спростити вираз $\sqrt[4]{\left(1-2a+a^2\right)\left(a^2-1\right)\left(a-1\right)}:\frac{a^2+2a-3}{\sqrt[4]{a+1}}$

18. Обчислити $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{96\sqrt[3]{2\sqrt[3]{96...}}}}$

19. Знайти хоча б одну трійку різних натуральних чисел x,y,z , для яких $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2016}$

20. Довести нерівність $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2016}}>\sqrt{2016}$

21. Знайти добуток $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2016^2}\right)$

22. Спростити $\dfrac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$

23. Порівняти вирази $\sqrt{2015}+\sqrt{2017}$ та $2\sqrt{2016}$

24. Обчислити $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

25. Спростити $x+1+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+10x+25}$

26. Спростити $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}+\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a+2\sqrt{a-2}-1}}-\sqrt{\dfrac{1}{a-2\sqrt{a-2}-1}}}$

РОЗДІЛ III
Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи

1. Дано $\log_a x=p, \log_b x=q, \log_{abc} x=r.$ Знайти $\log_c x.$

2. Обчислити: $-\log_{2016}\log_{2016}\underbrace{\sqrt[2016]{\sqrt[2016]{\ldots\sqrt[2016]{2016}}}}_{2016-\textit{разів}}$

3. Довести, що $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a\cdot\log_{c-b} a,$ якщо $a,b,c-$ катети і гіпотенуза прямокутного трикутника.

➔ *Розв'язати рівняння*:

4. $x^{\log_4 x}=2^{3(\log_4 x+3)}$ **5.** $2^{3x}-\dfrac{8}{2^{3x}}-6\cdot\left(2^x-\dfrac{1}{2^{x-1}}\right)=1$ **6.** $5^{\log_2 x}+2x^{\log_2 5}=15$

7. $\left(\sqrt[8]{8-\sqrt{63}}\right)^x+\left(\sqrt[8]{8+\sqrt{63}}\right)^x=16$ **8.** $\dfrac{\lg x^2}{\lg^2 x}+\dfrac{\lg x^3}{\lg^3 x}+\dfrac{\lg x^4}{\lg^4 x}+\ldots+\dfrac{\lg x^{2016}}{\lg^{2016} x}=8$

9. $2016^{\log_{2016} x+\log_{2016} x^2+\log_{2016} x^3+\ldots+\log_{2016} x^8}=25x^{34}$ **10.** $x^{\log_a x}=a^2x,\ (0<a\neq 1)$

11. $x^2\cdot 5^{\sqrt{3x-2}}+5^{2+x}=x^2\cdot 5^x+5^{\sqrt{3x-2}+2}$ **12.** $\left|2^x-1\right|+\left|2^x-2\right|=1$

13. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$ **14.** $\left(3x^2-10x+3\right)\cdot\lg|x-3|=0$

15. $2017\cdot 2016^{\log^2_{2016} x}-x^{\log_{2016} x}=2016^{\log_{\sqrt[3]{2016}} 2016}$

16. $x^x+139\cdot x^{-x}-108\cdot x^{-2x}=32$

17. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$

➔ *Розв'язати нерівність*:

18. $\log_{|x|}\dfrac{2x^2-x}{2}>1$ **19.** $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$ **20.** $\log_x\left(\log_9(3^x-9)\right)<1$

21. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}2,5x}>1$ **22.** $0<\log_2\log_{x-1}9<1$ **23.** $9^{1+\sin^2\pi x}+30\cdot 9^{\cos^2\pi x}\le 117$

➔ *Розв'язати систему*:

24. $\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_5(x-y)=1\\ x^2-y^2=2\end{cases}$ **25.** $\begin{cases}x^y=y^x\\ x^{2017}=y^{2016}\end{cases}$

26. $\begin{cases}10^{3-\lg(x-y)}=250\\ \sqrt{x-y}+0,5\cdot\sqrt{x+y}=\dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}}\end{cases}$ **27.** $\begin{cases}2^{2+\log_2(x^2+y^2)}=20\\ \lg(x^2-y^2)-\lg(x-y)=0\end{cases}$

28. $\begin{cases}2016^{\lg x}=2015^{\lg y}\\ (2015x)^{\lg 2015}=(2016y)^{\lg 2016}\end{cases}$ **29.** $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16}x+\log_{16}y=2\end{cases}$

➔ *Побудувати графік функції* :

30. $y=\left|\log_2\dfrac{4}{(x-1)^2}\right|$ **31.** $y=5^{\frac{|x|-x}{2}}$ **32.** $|y|=\log_3|x-2|$

33. $y=\log_{0,5}\log_{4-x}(4-x)^2$ **34.** $y=2016^{|\log_{2016}x|+1}$ **35.** $y=\sqrt{\lg\sin x}$

36. $y=2e^{\ln(\sin x+\cos x)}$ **37.** $y=2016^{|x-1|+\left(\sqrt{x+1}\right)^2}$

38. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_a\dfrac{3+2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\log_a\dfrac{4+3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1$ немає розв'язків?

39. Розв'язати рівняння: $a^{x+1}=b^{3-x}$.

40. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $3^{|x^2-4x+3|+1}\cdot\log_2\left(|x^2-4x+3|+1\right)=3^{1+3a-2a^2}\cdot\log_2\left(1+3a-2a^2\right)$ має рівно три кореня.

41. Розв'язати рівняння: $2-\log_{a^2}(x+1)=3\log_a\sqrt{x-1}-\log_{a^2}(x^2-1)^2$

42. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_x(ax-9)=2$ має один розв'язок?

43. Знайти найбільше ціле значення параметра a , при якому рівняння $(x+a)\lg(x-2016)=0$ має два різні розв'язки.

44. Знайти всі значення параметра k, при яких рівняння $\log_{2016}(kx)=2\log_{2016}(x+1)$ має один і тільки один додатній корінь.

45. При якому найменшому значенні параметра a рівняння $4^{|x-2|}-2a\cdot 2^{|x-2|}-5=0$ має розв'язок?

РОЗДІЛ IV
Тригонометричні функції, рівняння та нерівності

➔ *Доведення, перетворення, обчислення*:

1. Обчислити: $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$

2. Знайти значення виразу $a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$, якщо $tg\alpha$ і $tg\beta$ є коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

3. Довести тотожність: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$, при умові, що $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

4. Довести рівність: $2\arccos\dfrac{1}{2016}-\arccos\left(\dfrac{2}{2016^2}-1\right)=0$.

5. Довести, що якщо $arctg\alpha+arctg\beta+arctg\gamma=\pi$, то $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$.

6. Обчислити (у градусах): $\arccos\left(\sin\dfrac{50\pi}{9}\right)-3arctg\left(tg\dfrac{50\pi}{9}\right)$.

7. Обчислити $\cos\dfrac{\pi}{19}+\cos\dfrac{3\pi}{19}+...+\cos\dfrac{17\pi}{19}$

8. Обчислити значення виразу $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+...+\sin 2016x$, якщо відомо, що $\cos 2017x+2\sin x=1$

9. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=|\cos x|+|\cos 2x|$

10. Обчислити $\sin^2 2\alpha$, якщо $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+ctg^2\alpha+tg^2\alpha=7$.

11. Обчислити $tg^3\alpha-ctg^2\alpha$, якщо $tg\alpha-ctg\alpha=3$.

12. Обчислити $\cos\dfrac{\pi}{19}+\cos\dfrac{3\pi}{19}+...+\cos\dfrac{17\pi}{19}$.

➔ *Розв'язати рівняння, систему або нерівність:*

13. $\sin^{10}x+\cos^{10}x=\dfrac{29}{16}\cos^4 2x$

14. $(\cos 2x)^{2\cos 3x+4\cos x-1}=\dfrac{1}{\cos 2x}$

15. $(\cos 2x)^{\sin^2 x-1{,}5\sin x+0{,}5}=1$

16. $\log_{\sin x}2\cdot\log_{\sin^2 x}3=1$

17. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x-2=0$

18. $x^2-\sin^2 y=2x\cos y-1-y^2$

19. $|tgx+ctgx|=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

20. $2\arcsin x=\arcsin 2x$

21. $\arccos x-\arcsin x=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

22. $\arccos x\cdot\arcsin x=-\dfrac{\pi^2}{9}$

23. $(x-2)^2\cdot|\cos x|=\cos x$

24. $2^{\cos x}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$

25. $11\sin^2 7x-3\sin 7x\cdot\cos 7x+5\cos^2 7x=a-b$ **26.** $\dfrac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0$

27. $\sin^2 x+\sin 2x\cdot\sin 4x+...+\sin nx\cdot\sin n^2x=1$

28. $\cos\sqrt{x-1}=2a$ **29.** $tgax^2=\sqrt{3}$ **30.** $a\sin bx=1$

31. Знайти всі значення параметра a , при яких рівняння $\cos x-|\sin ax|=1$ має єдиний розв’язок.

32. Знайти найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння $(x+a)\cdot\arccos(x+2016)=0$ має два різні розв’язки.

33. $\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=\dfrac{3}{2}\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ **34.** $\begin{cases}\cos x+\cos y=a\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ **35.** $2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2}<0,5^{-3}$

36. Для всіх дійсних значень x довести нерівність $x^2\sin x+x\cos x+x^2+\dfrac{1}{2}>0$

37. $tg^2x_1+ctg^2x_1+tg^2x_2+ctg^2x_2+...+tg^2x_{1008}+ctg^2x_{1008}\le 2016$

➔ *Побудувати графік функції*:

38. $y=\cos\left(\dfrac{x^2-\pi nx}{x-\pi n}\right)-\sqrt{\cos^2 x}$ **39.** $y=ctgx\cdot|\sin x|$ **40.** $y=\dfrac{|x|}{x}-2\sin|x|\cdot\sin x$

41. $y=\sqrt{4\sin^4 x-2\cos 2x+3}+\sqrt{4\cos^4 x+2\cos 2x+3}$ **42.** $|y|=2016^{\frac{|\sin x|}{\sin x}}$

43. $y=\dfrac{\sin(|x|+x)}{\cos|x|}$ **44.** $y=\sqrt{\log_{2017}\sin^{2016}x}$ **45.** $y=|\cos x|\sin x+|\sin x|\cos x$

РОЗДІЛ V
Алгебраїчні рівняння, нерівності та системи з модулями та параметрами

➔ *Розв’язати рівняння з модулями*:

1. $\left|\left||x-1|+2\right|-1\right|=1$ **2.** $|2x+1|+|5-3x|+1-4x=0$

3. $|x+1|+|x+2|+|x+3|=6$ **4.** $\left||x+1|-|x-3|\right|=|x|$

5. $|x-1|+\dfrac{x}{|x|}-|x+1|=1$ **6.** $\left||x|-2\right|=2$

➔ *Розв’язати нерівності з модулями*:

7. $\left|3-|x-2|\right|\le 1$ **8.** $|x|-2|x+1|+3|x+2|>4$

9. $\dfrac{|x^2-4|(x-1)}{|x|(x-2016)^2(x+2017)^3} \geq 0$

10. Знайти пари цілих чисел, які задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\dfrac{1}{2}>0 \\ y+|x-1|<2 \end{cases}$$

➔ *Розв'язати системи з модулями*:

11. $\begin{cases} |x+3|+|y-2|=5 \\ |x+3|=2y-4 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} |-x|-\sqrt[3]{y+3}=1 \\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2-y=10 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-2|y|=1 \\ 2|x|+5y=-1 \end{cases}$

14. Залежно від значень параметра a розв'язати систему $\begin{cases} |x|+|y|=4 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$

➔ *Графіки з модулями*:

15. Чому дорівнює площа фігури, заданої нерівністю $|x-y|+|x+y|\leq 2$?

16. Побудувати графік функції: а) $y=|x^4-2x^3-x^2+2x|$; б) $x+|x|=y+|y|$

17. Побудувати графік функції $y=\dfrac{1}{2}\left(\left|1+\sqrt{4-x^2}\right|+\left|1-\sqrt{4-x^2}\right|\right)$

18. Знайти периметр плоскої фігури, заданої на координатній площині умовами:

$$\begin{cases} 2|x+2|\cdot\arcsin(y-1)^2\leq\pi(x+2) \\ 2|y-1|-x\geq 0 \end{cases}$$

19. Зобразити фігуру, утворену всіма точками (x,y) декартової площини XOY, координати яких задовольняють нерівність: $x^2+y^2+6\left(x-6|y|\right)\leq 0$ та знайти її площу.

20. Знайти площу фігури, заданої на координатній площині умовами: $\begin{cases} y\geq -|x|-1 \\ y\leq -2|x|+3 \end{cases}$.

➔*Рівняння з параметрами*:

21. При яких значеннях параметра a рівняння $x^4+ax^2=2016$ та $x^3+ax=2016$ мають спільний корінь?

22. При якому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має один корінь?

23. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(a-1-|x-1|\right)\cdot\left(a+x^2-2x-4\right)=0$ має рівно три розв'язки?

24. Знайти всі значення параметра a , при яких корені рівняння $x^2 - ax + 9a = 0$ є цілими числами.

25. При яких значеннях параметра m рівняння $x^2 - |10x - 15| - m = 0$ має два кореня?

26. При якому значенні параметра m рівняння $\left|x\left(|x| - 5\right)\right| = m$ має чотири кореня?

27. Параметр k квадратного рівняння $x^2 - 2kx + 3(2k - 3) = 0$ набуває значень 1,2,3,4,5,6,7 і 8. Кожному з цих значень k відповідає та чи інша кількість коренів даного рівняння. Знайти кількість усіх коренів.

28. При яких значеннях параметра m в рівнянні $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ один корінь рівняння буде у два рази більший за другий? Знайти ці корені.

29. При якому значення параметра m рівняння $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$ та $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$ мають спільний корінь?

30. При якому найменшому цілому значенні параметра m лише більший корінь рівняння $3x^2 - (4m-1)x - m - 1 = 0$ є у проміжку $[2;3]$?

31. При якому найбільшому цілому значенні параметра m корені рівняння $2x^2 + (4m-1)x - 3m - 4 = 0$ є по різні сторони ззовні проміжку $[-1;1]$?

32. При яких значеннях параметра a рівняння $a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2} - x\right) + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$ має розв'язок?

➔ *Системи з параметрами*:

33. Скільки спільних точок мають множини $x^2 + y^2 + 4x = 0$ та $x^2 + y^2 - 2x = a^2 - 2a$ залежно від параметра a .

34. Скільки розв'язків в залежності від значення параметра a має система рівнянь $\begin{cases} x - y^2 = a \\ y - x^2 = a \end{cases}$

35. При якому найбільшому цілому значенні параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x-a)^2 = 9 - y^2 \end{cases}$ має тільки два різні розв'язки?

36. При якому найменшому значенні параметра a система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = 5 \\ 5y - x^2 + a^2 = 0 \end{cases}$ має тільки три розв'язки?

37. При якому найбільшому від'ємному цілому значенні параметра a система рівнянь $\begin{cases} y = |x - 10| + |x + 15| \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ має два розв'язки?

38. При якому найменшому невід'ємному цілому значенні параметра a система рівнянь $\begin{cases} |x|+|y|=2016 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ немає розв'язків?

РОЗДІЛ VI
Похідна та її застосування

1. Знайти похідні:

а) $y=2016^{x^{2016}}\cdot x^{2016}$ б) $y=x^{2016^x}\cdot 2017^x$ в) $y=x^{e^x}\cdot x^{2016}$

2. Обчислити $f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, якщо $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x}$

3. У арифметичній прогресії $a_3=-1$. При якому значенні різниці прогресії $d<0$ добуток другого, четвертого та сьомого членів прогресії буде найменшим?

4. Дослідити функцію $y=\log_{2016}\log_{x-3}|x-3|^x$ і побудувати її графік.

5. Знайти суму коренів рівняння $f(x)+4f'(x)=0$, якщо $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$

6. Розв'язати рівняння $f'(x)=2f(x)$, якщо $f(x)=e^x\cdot(x^2+3x+1)$

7. Обчислити значення виразу $1+2\cdot\dfrac{1}{\pi}+3\cdot\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^2+4\cdot\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^3+\ldots+2016\cdot\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{2017}$

8. Визначити кількість цілих коренів рівняння $xe^{-x}+e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}-1=0$

9. Яке з чисел більше: 2016^{2017} чи 2017^{2016}?

10. Довести рівність: а) $1+2\ln x\le x^2,\ x>0$, б) $e^x>1+(1+x)\ln(1+x),\ x>0$

11. Скласти рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$ в точці $x_0=0$.

12. Знайти кутовий коефіцієнт нахилу дотичної до графіка функції $f(x)=\dfrac{x^2}{2016}\cdot\sqrt{\sin^{2016}\left(arctg\,2016x+arcctg\,2016x\right)}$ в точці $x_0=2016$.

13. При якому значення параметра a лінії $y=x$ та $y=\log_a x$ дотикаються?

14. Визначити кількість дійсних коренів рівняння $|\ln x|=ax$ залежно від значень параметра a.

➔ *Знайти найбільше і найменше значення функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$:

15. $f(x)=(x-2)^2e^{|x|}$, $[-1;3]$; **16.** $f(x)=x^3-2x\cdot|x-2|$, $[0;3]$;

17. $f(x)=2tgx-tg^2x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$; **18.** $y=\log_3{}^3 x-9\log_3{}^2 x+15\log_3 x$, $[9;243]$;

19. $y=\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin x,\ [0;\pi]$; **20.** $y=5^{3x}-6\cdot 5^{2x}+9\cdot 5^x, [-1;1]$;

21. Знайти всі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\frac{a^2-1}{3}\cdot x^3+(a-1)x^2+2x+5$ зростає на $x\in R$.

22. При якому значенні параметра a функція $f(x)=(a-12)x^3-3(a-12)x^2+6x+7$ зростає на $x\in R$?

23. При якому значенні параметра a відстань між вершинами парабол $y=x^2+8x+15$ та $y=2x^2-8x+a+2$ є найменшою?

24. Залежно від параметра a знайти точку максимуму функції $y=\frac{x^3}{3}-\frac{a+2}{2}\cdot x^2+2a+4$.

25. Скільки екстремумів має функція $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+...+\frac{1}{x+2016}$?

26. Знайти критичні точки функції $f(x)=0,5e^{2x}+(1-a)e^x-ax+\sin 2016$

27. В рівнобічній трапеції нижня основа дорівнює l, кут при основі дорівнює α. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. При якому значенні α площа трапеції буде найбільшою? Знайти цю площу.

28. Знайти екстремуми функції $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

29. В кулю об‘єму V вписати конус з найбільшою бічною поверхнею.

30. Знайти висоту конуса найменшого об‘єму, описаного навколо півкулі радіуса R . Основи півкулі і конуса лежать в одній площині і концентричні.

31. Нехай E – точка на стороні квадрата $ABCD$. Знайти такі точки M і K на сторонах AB і BC , щоб відрізки MK і EC були паралельні, а чотирикутник $MKCE$ мав найбільшу площу.

32. У трикутник, обмежений графіком функції $y=|x-15|-4|x|$ та віссю OX вписаний прямокутник так, що дві його вершини лежать на графіку, а дві інші на осі OX . Знайти розміри прямокутника, щоб його площа була найбільша.

33. Потрібно побудувати відкритий циліндричний резервуар місткістю V з матеріалу товщиною d . Якими повинні бути розміри резервуару, щоб затрати матеріалу були мінімальними?

34. В півкулю радіусу R вписано правильну трикутну призму, нижня основа призми лежить на основі півкулі. Знайти найменший об‘єм призми.

35. Сторони прямокутника рівні 2 і 5. Через точку на його меншій стороні провели пряму, яка відтинає прямокутний трикутник з периметром 8. Знайти найменше значення площі частини прямокутника, що залишилася.

РОЗДІЛ VII
Планіметрія

1. На продовженні AB, BC, CD і DA сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ відкладено відрізки $BB_1 = AD, CC_1 = CD, AA_1 = AD$. Довести, що площа чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$ у п'ять разів більша за площу чотирикутника $ABCD$.

2. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні і рівні. Знайти його кути, якщо $AB = 1, BC = \sqrt{2}, CD = \sqrt{3}$.

3. Точки A_1 і C_2 , B_1 і A_2, C_1 і B_2 вибрані відповідно на сторонах AC, AB, BC трикутника ABC так, що $A_1A_2 \| BC,\ B_1B_2 \| AC,\ C_1C_2 \| AB$ і відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в центрі кола, вписаного в трикутник ABC. Знайти значення виразу $\dfrac{A_1A_2}{BC} + \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB}$.

4. На сторонах AB та BC трикутника ABC вибрано точки M і N. Відрізки AN і CM перетинаються в точці Q. Знайти площу чотирикутника $QMBN$, якщо площі трикутників AQC, AQM і CQN відповідно рівні S_1, S_2 та S_3.

5. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата, як на діаметрах, всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру "квітка". Доведіть, що загальна площа "квітки" дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

6. Тангенси кутів трикутника є натуральними числами. Знайти ці числа.

7. За трьома медіанами трикутника ABC m_a, m_b, m_c обчислити сторони трикутника a, b, c.

8. Площа S трикутника обчислюється за формулою $S = p(p-c)$, де p – півпериметр, c – довжина сторони. Довести, що цей трикутник – прямокутний.

9. У трапеції $ABCD$ діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо $AC = 17$, а висота трапеції – 8.

10. У кут, що містить 60°, вписано п'ять кіл так, що кожне наступне коло (починаючи з другого) дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу меншого круга?

11. Діагоналі опуклого чотирикутника рівні a і b. Відрізки, які сполучають середини протилежних сторін рівні. Знайти площу чотирикутника.

12. Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють S_1 та S_2 . Знайти площу трапеції.

13. Всередині трикутника ABC взято довільну точку K і через неї проведено три прямі, паралельні сторонам трикутника. Ці прямі ділять трикутник ABC на шість частин, з яких три частини є трикутниками. Площі цих трикутників S_1, S_2 та S_3 . Знайти площу трикутника ABC.

14. В круг радіуса R вписано три рівних круга, які дотикаються до даного круга і попарно один одного. Обчислити площу криволінійної фігури, яка міститься між точками дотику цих кругів.

15. Два кола радіусами r і R дотикаються одне одного і деякої прямої. Знайти радіус ρ кола, яке дотикається перших двох і даної прямої і відомо, що $\rho < r < R$.

16. На колі радіуса 1 см відмічено 100 точок. Довести, що на цьому колі можна знайти таку точку, щоб сума відстаней від неї до всіх відмічених точок була більшою за 100 см.

17. У прямокутному трикутнику, висота, проведена на гіпотенузу ділить її на відрізки, різниця яких рівна одному з катетів. Знайти кути трикутника.

18. Довести, що якщо сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то різниця цієї прогресії рівна радіусу вписаного в трикутник кола.

19. У паралелограмі діагоналі d_1 і d_2 $(d_1 > d_2)$, а гострий кут між сторонами α. Знайти площу паралелограма.

20. В трикутнику відомі довжини двох сторін $a = 2, b = 2$ і площа $S = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. Медіана, проведена до третьої його сторони, менша за її половину. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

21. Бісектриса одного з гострих кутів прямокутного трикутника в точці перетину з висотою, опущеною на гіпотенузу, ділиться на відрізки, відношення довжин яких рівне $1+\sqrt{2}$, рахуючи від вершини. Знайти величини гострих кутів трикутника.

22. У прямокутному трикутнику ABC бісектриса CE прямого кута C ділиться центром O вписаного кола так, що $CO:OE = \sqrt{3}:\sqrt{2}$. Знайти гострі кути трикутника.

23. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Обчислити площу трапеції, якщо її висота рівна a.

24. В трикутнику ABC медіани AD і BE перетинаються під прямим кутом. Обчислити довжину третьої сторони трикутника, якщо $|AC| = a,\ |BC| = b.$

25. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки 4 і 2 см., а висота, проведена до тієї самої сторони дорівнює $\sqrt{15}$ см. Знайти довжини сторін трикутника, якщо відомо, що вони виражаються цілими числами?

Розділ VIII
Евристичні задачі

1. Дано набір цифр 1 5 6 2 4 3 7, переставляючи по 3 цифри разом, не змінюючи порядку їх слідування, за два кроки впорядкувати цифри за зростанням.

2. Чи ділиться число 2016^{2016} націло на 9^9 ?

3. Обчислити $\left(\underbrace{999...9}_{16}\right):\left(\underbrace{999...9}_{8}\right)-1$

4. На яку максимально можливу кількість частин можна розрізати плоский круглий торт чотирма прямими лініями?

5. Знайти останню цифру числа $A=1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2015\cdot 2016$.

6. Є два відра місткістю 4 л і 9 л. Як за їх допомогою відміряти рівно 6 л води? .

7. Як за допомогою тільки трьох зважувань розподілити 9 кг борошна по двох пакетах 7 і 2 кг, якщо для зважування є дві гирі 50 та 200 г та терези?

8. Розрізати довільний трикутник на три частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.

9. Розділити на чотири однакові частини рівносторонній трикутник, у якого зрізано верхню частину прямою, паралельною основі, якщо відомо, що площа зрізаної частини дорівнює $0,25$ площі трикутника.

10. Після завершення одночасного опитування трьох свідків автомобільної аварії ними були зроблені заяви: А: "Б говорить неправду", Б: "В говорить неправду", В: "Ні А, ні Б не можна вірити". Хто із свідків говорив правду?

11. Студенти різних факультетів університету організували естрадний квартет. Михайло у ньому грає на саксофоні. Піаніст вчиться на фізичному факультеті. Ім'я ударника не Валерій, а у студента географічного факультету ім'я не Леонід. Михайло вчиться не на історичному факультеті. Андрій не піаніст і не біолог. Валерій вчиться не на фізичному факультеті, а ударник не на історичному. Леонід грає не на контрабасі. На якому інструменті грає Валерій і на якому факультеті він вчиться?

12. Журналіст приїхав на аеродром, щоб взяти інтерв'ю у Дубенка, Вуса і Федоришина – пілота, бортінженера та штурмана. Поки він їх розшукував, розпитуючи людей, він почув, що: "Дубенко – не пілот", "Федоришин – не бортінженер", "Дубенко – бортінженер", "Федоришин – не пілот". Під час інтерв'ю з екіпажем журналіст з'ясував, що з чотирьох "фактів" правильним є тільки один. Яка спеціальність у кожного члена екіпажу?

13. Є дві посудини, в першій з них 1 л води, а друга посудина пуста. Послідовно проводять переливання з першої посудини у другу, з другої у першу і т.д., причому частина води, яку відливають, становить послідовно 1/2,1/3,1/4 і т.д. від кількості води в посудині, з якої вода відливається. Скільки води буде в посудинах після 2017 відливань?

14. Є 10 мішків і у кожному з них по 10 золотих монет. Кожна монета важить 10 грамів. Є один мішок, в якому всі монети фальшиві і важать по 9 грамів. Як за одне зважування визначити, у якому мішку фальшиві монети?
15. В сплаві 20 грам золота. Після того, як додали 5 грамів срібла і 10 грамів золота, срібла стало на 5% більше. Знайти початковий вміст срібла у відсотках.
16. Знайти тризначне число, якщо відомо, що сума його цифр дорівнює 17, а сума квадратів його цифр дорівнює 109. Якщо від цього числа відняти 495, то одержимо число, записане тими ж цифрами, але у зворотньому порядку.
17. Вся площина розмальована у два кольори. Довести, що знайдуться дві точки одного кольору, розташовані на відстані 1 м одна від одної.
18. Обчислити $20162016 \cdot 201720172017 - 20172017 \cdot 201620162016$.
19. Пряма розмальована у два кольори. Доведіть, що існує відрізок цієї прямої, середина і кінці якого мають один колір.
20. Сільський гіпнотизер Панас Панасович розводить курей та індиків. Внаслідок його експериментів десята частина курей вважає, що вони – індики, а десята частина індиків вважає, що вони – кури. Якщо брати загалом, то п’ята частина птахів Панаса Панасовича вважає себе індиками. А якою насправді є частка індиків у його господарстві?
21. За яким правилом утворена послідовність 1,2,2,3,2,4,2,4,3,4,2,…? Написати два її наступні члени.
22. Серед 16 однакових кульок дві радіоактивні. Як знайти їх за допомогою восьми перевірок на радіоактивність, якщо одна така перевірка дає змогу з’ясувати, чи є хоча б одна радіоактивна кулька в досліджуваній групі кульок?
23. У середину квадрата зі стороною 10 см “кинуто” 101 точку (жодні три не лежать на одній прямій). Довести, що серед цих точок є три точки, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 кв. см.
24. За круглим столом сидять 30 студентів. Кожен з них або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є рівно один брехун. При опитуванні 12 студентів сказали, що рівно один з їх сусідв брехун, а решта сказали, що обидва сусіди – брехуни. Скільки брехунів сидять за столом?
25. У новосформованій групі деякі студенти виявилися вже знайомими між собою, а деякі – ні. У перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилась на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожний хлопець замріяно подивився на кожну із незнайомих дівчат. Всього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки в групі хлопців і скільки дівчат, якщо у групі не більше 40 студентів?

26. Два студента по черзі заміняють зірочки числами: $\begin{cases} x + * \cdot y + * \cdot z = * \\ x + * \cdot y + * \cdot z = * \\ x + * \cdot y + * \cdot z = * \end{cases}$.

Довести, що той студент, який почав гру може досягнути того, щоб в результаті система була несумісною.

БАЖАЄМО УСПІХІВ!