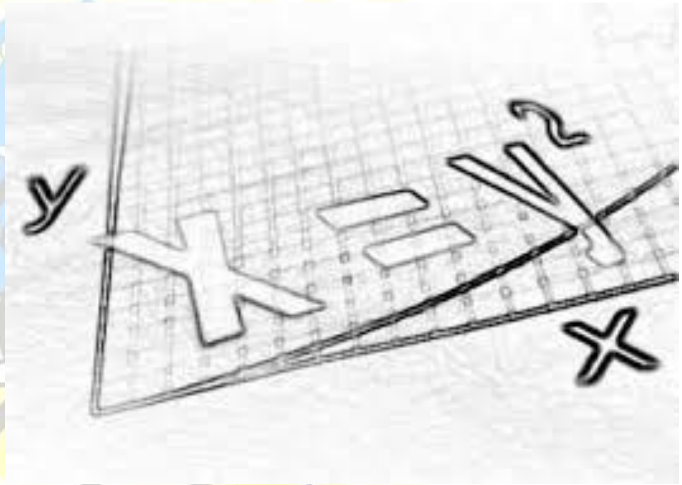
Міністерство освіти і науки України
Рада директорів ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації
Львівський коледж транспортної інфраструктури
ДНУЗТ ім. ак. В. Лазаряна

Збірник

задач для підготовки до обласної студентської олімпіади з математики



Львів 2014

Збірник завдань для підготовки до обласної студентської олімпіади з математики. Частина 1. – Львів: Видавництво Львівського коледжу транспортної інфраструктури, 2014. – 15 с.

Укладачі: *Сеник О.І., Шимків Г.Є., Кісіль М.М.* – викладачі Львівського коледжу транспортної інфраструктури ДНУЗТ ім. ак. В Лазаряна

Рекомендовано до друку цикловою комісією природничо-математичних дисциплін Львівського коледжу транспортної інфраструктури (протокол № 2 від 06.10.2014)

Розділ 1. Тотожні перетворення виразів

I. Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів

1.Обчислити:

1.1. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

1.2. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$;

1.3. $\sqrt{x-3\sqrt{x-4}}-\sqrt{9+\sqrt{4-x}}$;

1.4. $\sqrt{3(\sqrt{11}-\sqrt{8})}\cdot\sqrt[4]{19+4\sqrt{22}}$;

1.5. $\left(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$;

1.6. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)$.

2. Спростити вираз:

2.1. $\sqrt{2a-4+2\sqrt{a^2-4a+3}}-\sqrt{a-1}$;

2.2. $\sqrt[3]{\frac{a^3-3a+(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{a^3-3a-(a^2-1)\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $|a|\geq 2$;

2.3. $\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2}-x\sqrt{2}$;

2.4. $\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

2.5. $\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}\div a^{1/3}$;

2.6. $\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}|2x^2-x-1|}$.

II. Тотожні перетворення трансцендентних виразів

3. Обчислити:

3.1 $(log_3 2 + log_2 81 + 4)(log_3 2 - log_{18} 2)\, log_2 3 - log_3 2$;

3.2. $log_{ab} \frac{\sqrt{a}}{b} + log_{\sqrt{ab}}\, b + log_a \sqrt[3]{b}$, якщо $log_a b = 2$;

3.3. $\frac{log_2^2 14 + log_2 14 \cdot log_2 7 - 2 log_2^2 7}{log_2 14 + 2 log_2 7}$;

3.4. $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot\ log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}\ \cdot \dots\ \cdot log_{\frac{1}{99}} \frac{1}{100} \cdot lg2$;

3.5. $3 \cdot 7^{2\left(log_{\sqrt{3}} 7\right)^{-1}} - 3 \cdot log_9 \sqrt[4]{9 \sqrt[3]{9}} - 10$.

4. Спростити вираз $a^{\frac{log_b (log_b a)}{log_b a}} \cdot log_a b$.

5. Обчислити:

5.1. $\frac{2 - cos\alpha - \sqrt{3} sin\alpha}{sin\alpha - \sqrt{3} cos\alpha}$, якщо $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 4$;

5.2. $tg\alpha - ctg\alpha$, якщо $tg\alpha + ctg\alpha = \sqrt{8}$, $0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;

5.3. $\frac{sin2\alpha + sin2\beta + sin2\gamma}{sin\alpha sin\beta sin\gamma}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$;

5.4. $cos \frac{\pi}{7} \cdot cos \frac{3\pi}{7} \cdot cos \frac{5\pi}{7}$;

5.5. $sin^4 \frac{\pi}{16} + sin^4 \frac{3\pi}{16} + sin^4 \frac{5\pi}{16} + sin^4 \frac{7\pi}{16}$;

5.6. $tg \frac{\alpha}{2} tg \frac{\beta}{2}$, якщо $sin\alpha + sin\beta = 2\, sin\,(\alpha + \beta)$.

6. Дано: $log_{ab} a$. Знайти $log_{ab} b$.

7. Числа a, b задовольняють рівність $\frac{a^2 b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$. Знайти всі можливі значення виразу $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Розділ 2. Рівняння

I. Раціональні та ірраціональні рівняння

1. $\dfrac{2x^2-x+3}{3}-\dfrac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\dfrac{x}{6}$;

2. $\dfrac{1}{\left(x^2-2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{40}{9x^4}$;

3. $x^4+10x^3-125x-54=0$;

4. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;

5. $\sqrt{x^2-7x+16}-\sqrt{6x^2-47x+96}=4-x$;

6. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+x=0$;

7. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{6}$;

8. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$

II. Трансцендентні рівняння

1. $sin^2\frac{x}{3}+\frac{1}{4}sin^4x=-sin\frac{x}{3}sin^6x;$

2. $4\cdot 4^x+4\cdot 4^{-x}-3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}-53=0$;

3. $x^x+139\cdot x^{-x}-108\cdot x^{-2x}=32;$

4. $\sqrt{log_x\sqrt{5x}}\cdot log_5 x+1=0;$

5. $\log_{5x}\left(\dfrac{5}{x}\right)+\log_5^2 x=1$;

6. $\sqrt{1+a\left(2^x-2\right)}+2^x=1$;

7. $4\cos^4\frac{x}{4}=\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x$;

8. $6+4\cdot 2^{1-|x|}=|x+4|+|x-4|$;

9. $\log_2(x+2)^2+\log_2|x+2|=12$.

Розділ 3. Нерівності

I. Раціональні та ірраціональні нерівності

1. $\big||x-1|+|2-3|\big|>3+x$. 2. $|2x^2+x-1|>|x+1|$.

3. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності у проміжку

[–9; 9]: $\frac{-5x|x|}{x+|x|}\leq 0$.

4. Розв'яжіть $\frac{|x^2-4|(x-1)}{|x|(x-2013)^2(x+2015)^2}\geq 0$ нерівність та вкажіть найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності.

5. Знайти суму найбільшого і найменшого розв'язку нерівності $\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-4}\geq 2$.

6. Визначити середнє арифметичне цілих розв'язків нерівності $\frac{\sqrt{(x+12)^2}\left(5-x^2+4x\right)}{169-x^2}\leq 0$.

7. При якому найбільшому цілому значенні параметра *a* нерівність $x+4a>5\sqrt{ax}$ не має розв'язків.

8. При якому значенні параметра *a* розв'язок нерівності

$\frac{x-a}{x^2+1}-\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}>0$ містить інтервал *(0; 1)*?

II. Трансцендентні нерівності

1. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9.$

2. $log_2(2-x) - log_2 \frac{sin\frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2} + log_2(x+7).$

3. $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}.$

4. $0{,}5^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{sin2x}{1-cos2x}} < 0{,}5.$

5. $log_x(log_9(3^x - 9)) < 1.$

6. $0{,}4^{\left(log_3\frac{3}{x}\right) log_3 3x} > 6{,}25^{log_3 x^2+2}.$

7. $2{,}25^{log_2(x^2-3x-10)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{log_{1/2}(x^2+4x+4)}.$

8. $(3/5)^{13x^2} \leq (3/5)^{x^4+36} < (3/5)^{12x^2}.$

9. $log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2.$

Розділ 4. Системи рівнянь та нерівностей

I. Раціональні та ірраціональні системи рівнянь та нерівностей

Розв'язати системи рівнянь:

1. $\begin{cases} |x+3| + |y-2| = 5, \\ |x+3| = 2y - 4 . \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x^2 - 2y + 3\sqrt{3x^2 - 2y + 3} = 15, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

5. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} |x| + y - 4 = 0, \\ (y - a)^2 + x^2 = 9 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

6. Знайти найбільше значення параметра p, при якому система $\begin{cases} (p - 4)x + (p - 4)y = 0, \\ 3x + py = 3{,}3 \end{cases}$ не має розв'язків.

7. При якому найбільшому цілому значенні параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 121, \\ y - x^2 = a \end{cases}$ має два розв'язки?

8. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

9. При якому значенні a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$

10. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} (x + 2)|x^2 - 3x + 2| \le 0, \\ x \ge 5. \end{cases}$

Розв'язати системи нерівностей:

11. $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \le 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{3x} < 1, \\ x + \frac{4}{3} \ge \frac{4}{3x}, \\ 9x^2 - 9x + 1 < 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{4x - 7} < x, \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 5} > 4. \end{cases}$

II. Трансцендентні системи рівнянь

1. $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} sin^2 \pi x - cos^2 \pi x = cos\pi x, \\ 5^{-sin\frac{\pi x}{5}} + 5^{sin\frac{\pi x}{5}} = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0, \\ lg(3x-y) + lg(x+y) = 4lg2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 0{,}5\ log_2(x+y)^2 = 3 - log_2|x-y|, \\ log_{x^2+y^2} 10 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} log_2(x+y) - log_5(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

7. Знайти найменше ціле значення параметра *a,* при якому система рівнянь має два розв'язки: $\begin{cases} y = log_{1/2} cosx\ , \\ x^2 + (y-a)^2 = 4. \end{cases}$

Розділ 5. Функції, їх властивості і графіки

1. Обчислити область визначення функції:

а) $y = \frac{lg\,x}{arcsin(x-3)}$; *б)* $y = \sqrt{lg\frac{1-2x}{x+3}}$; *в)* $y = \sqrt{2^x - 3^x}$;

г) $y = log_3 log_{0,5} x$; *д)* $y = \frac{1}{1-\sqrt{x^2}}$;

е) $y = \sqrt{12 - x - x^2} + \sqrt{x-3}$.

2. Функції $f(x)$ *і* $g(x)$ – парні і $f(2) = 5$, $g(-5) = -2$. Обчислити $-2f(-2) + 3g(5)$.

3. Функція $f(x)$ – парна, а $g(x)$ – непарна і $f(-7) = -11$, $g(5) = -2$. Обчислити $f\big(13 - 3g(-5)\big)$.

4. При якому значенні параметра a функція

$f(x) = (a+2)x^2 + (5a-4)x + 2a$ буде парною?

5. Обчислити найменше значення функції:

а) $y = |x| + 6;$ *б)* $y = 5 + \sqrt{x-2};$ *в)* $y = 5^{\sin x + 1} - 1.$

6. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $D = \{-5,0,1,2\}$ *і* $f(-5) = 8,$ $f(0) = -7,$ $f(1) = -3,$ $f(2) = 1.$ Чому дорівнює найменше число в області визначення обернено до заданої функції?

7. Нехай $f(x) = 5x + 5$. Розв'язати рівняння $f\big(f(x)\big) = 55.$

8. Визначити найменший додатний період функції:

а) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 1;$ *б)* $f(x) = \cos\left(4\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2};$

в) $f(x) = tg(4\pi x) - \pi;$ *г)* $f(x) = (\cos^2 2x + \sin^2 2x)\, ctg\,\frac{\pi x}{11};$

д) $f(x) = |\sin(5\pi x)|;$ *е)* $f(x) = 2 - \sin^2(\frac{2\pi x}{5}).$

9. При якому значенні параметра a графік функції

$y = x^2 + (a+2)x + 25$ буде дотикатися до осі OX?

10. При якому значенні параметра a графік функції

$y = x^2 + 5x + a$ буде проходити через точку $A(2;1)$?

Розділ 6. Похідна та її застосування

1. Розв'язати рівняння:

1.1. $f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0,$ якщо $f(x) = x^3 \ln x;$

1.2. $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0,$ якщо $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. Знайти другу похідну функції $f(x)$ і обчислити її значення при даному значенні x :

$f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x; \; f''(\pi) - ?$

3. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x(\ln x - 1)$ у точці з абсцисою $x = e$.

4. На параболі $y = -x^2 + 7x - 10$ знайти точку, в якій дотична до неї паралельна прямій $x + y - 1 = 0$.

5. Знайти найбільше та найменше значення функції:

5.1 $y = x + \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 2x + 1)}$ на відрізку $\left[-4; -\frac{5}{4}\right]$;

5.2 $y = x\ln x - x\ln 5$ на відрізку $[1;5]$.

6. Знайти точки мінімуму функції $y = \sqrt{3}cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}$.

7. Знайти точки максимуму функції

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{5-x}{2}$$.

Розділ 7. Планіметрія

1. Бісектриса кута *А* трикутника *АВС* ділить протилежну сторону на два відрізки *– а і в, а > в*. Дотична до кола, описаного навколо трикутника *АВС* , проходить через вершину *А,* перетинає пряму *ВС* в точці *D*. Знайти *AD*.

2. Три круглих столи однакових розмірів розставили таким чином, що кожен з них дотикається до двох інших. Яка площа утвореної дірки?

3. В трапецію вписано коло радіуса *r*. Знайдіть площу трапеції, якщо кути при більшій основі рівні α та β.

4. З вертольота, що знаходиться над шосейною дорогою, було помічено колонку машин, яка рухається по ній. Початок колони

видно під кутом 75^o, а кінець – під кутом 70^o. Знайти довжину колони, якщо вертоліт знаходиться на висоті *1650 м.*

5. Дано чотирикутник *ABCD,* площа якого *1м.* З точки *O,* що знаходиться в середині чотирикутника, опущені перпендикуляри *OK,OL,OM і ON* на сторони *AB, BC, CD і DA* відповідно. Відомо, що $AK \geq KB$, $BL \geq LC$, $CM \geq MD$ *і* $DN \geq NA$. Знайти площу чотирикутника KLMN.

6. Доведіть, що якщо для трикутника зі сторонами a, b, c виконується рівність $a^3 = b^3 + c^3$, то він гострокутний.

7. На дузі *BC* кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, взято точку *P*. Відрізки *AP і BC* перетинаються в точці *Q*. Довести, що $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

8. В трапецію вписано коло радіуса *r*. Знайдіть площу трапеції, якщо кути при більшій основі рівні α та β.

9. В рівнобедреному трикутнику *ABC* з основою *BC* бісектриса *BL* вдвічі більше висоти *AD*. Знайдіть кути трикутника.

10. Для якого найменшого значення n існує опуклий n-кутник, у якого синуси усіх кутів рівні, а усі сторони мають різну довжину.

11. Чотирикутник *ABCD* вписаний в коло. Відомо, що *AB=BD* і *AC=BC*. Доведіть, що $\angle ABC = 60^o$.

12. У трьох вершини правильного п’ятикутника розмістили по фішці. Дозволяється пересувати їх по діагоналі в будь-яку вільну вершину. Чи можна таким способом досягти того, щоб одна з фішок повернулася на своє місце, а дві інші помінялися місцями?

13. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють *12 см і 5см*. Знайти відстань між центрами вписаного і описаного кіл.

14. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, а її площа дорівнює a^2. Визначити висоту трапеції.

15. У трикутнику ABC медіани AD і BE перетинаються під прямим кутом, $AC = 3см$, $BC = 4см$. Знайти сторону AB цього трикутника.

Розділ 8. Текстові задачі

1. Яку найбільшу кількість слонів можна розташувати на шаховій дошці, щоб ані один із слонів не був під подвійною бійкою?

2. Готуючись до ЗНО, щоденно впродовж року абітурієнт розв'язував не менше однієї задачі кожного дня, при цьому кожного тижня він розв'язував не більше як *12* задач. Довести, що знайдеться декілька послідовних днів, в які він розв'язував *20* задач.

3. З *61* монети за *4* зважування відокремити фальшиву (вона тяжча, ніж інші).

4. Кожен із трьох друзів зіграв однакову кількість шахових партій з іншим. При цьому виявилось, що перший з них виграв найбільшу кількість партій, другий програв найменшу кількість партій, а третій набрав найбільшу кількість очків. Чи могло так бути? Якщо ні, то доведіть. Якщо так, то наведіть приклад.

5. На всесвітньому фестивалі молоді зустрілись *6* делегатів. Виявилось, що серед будь-яких трьох з них двоє можуть порозумітися між собою якоюсь мовою. Доведіть, що тоді найдеться 3 делегатів, кожен з яких може порозумітись з кожним.

6. Трьом студентам в темній кімнаті одягли на голову по чорній шапці. Перед ними поставлено завдання відгадати, хто в якій шапці, якщо всього шапок *5,* причому *2* з них – сірі, а *3* – чорні. Сірі шапки сховали перед тим, як у кімнаті запалили світло. Через деякий час один студент відгадав, що він стоїть в чорній шапці. Як він це зробив?

7. Серед учасників шахових змагань хлопців було в *7* разів більше, ніж дівчат і вони разом набрали в три рази більше очок, ніж дівчата. Скільки дівчат взяло участь у змаганнях, якщо кожен гравець зіграв з кожним по дві партії (одну чорними, одну білими). За виграш учасник отримував *1* очко, за нічию – *½* очка і за програш – *0.*

8. Відпочиваючи в курортному містечку, кілька друзів дізналася, що в сусідньому місті є дуже гарний музей, який варто відвідати. Щоб зекономити, друзі вирішили йти пішки і о *10.00 год* успішно вийшли з бази відпочинку. Пройшовши k кілометрів, їх догнала бричка, керманич якої погодився трохи підвезти друзів, після чого їм довелося ще пройти *k км,* і рівно в полудень товариші прийшли до місця призначення. Скільки часу знадобиться друзям на повернення назад пішки, якщо відомо, що бричкою вони їхали вдвічі швидше, ніж ішли пішки?

9. Один камінь сапфіру і два камінці топазу в двічі дорожчі за смарагд. А сім сапфірів і один топаз, цінніші в *8* разів від того ж таки смарагду. Який з цих каменів дешевший – сапфір, топаз чи смарагд?

10. На участь у благодійному велопробігу зареєструвалися *420* учасників. Група волонтерів зголосилася взятися за монтування необхідної кількості велосипедів, враховуючи статистику, що з *35* велосипедів, при даних умовах, *1* може вийти з ладу. Але *4* особи не змогли долучитися до роботи у зв’язку з іншими терміновими справами. Скільки волонтерів повинні були прийти на роботу, якщо відомо, що кожному працюючому прийшлося монтувати на *9* велосипедів більше?

11. Вік студента в *2015* році дорівнюватиме сумі цифр його року народження. Скільки років буде студенту в *2015* році?

12. Скількома нулями закінчується число, яке дорівнює добутку всіх натуральних чисел від *1* до *2015* включно?

13. Коли пасажири увійшли в порожній трамвай, *2/7* їх зайняли місця для сидіння. Скільки пасажирів увійшло на початку, якщо після першої зупинки їх кількість збільшилася рівно на *15%* і відомо, що трамвай вміщає не більше *180* осіб?

14. На острові Кольоровому живуть *13* червоних, *15* жовтих і *17* зелених хамелеонів. Якщо зустрічаються два хамелеони різного кольору, то вони одночасно міняють свій колір на третій (червоний і жовтий стають обидва зелені і т.д.). Чи може статись так, що через деякий час всі хамелеони будуть одного кольору? Відповідь поясніть.

15. Хлопчик стоїть на автобусній зупинці і мерзне, а автобуса немає. Йому хочеться пройти до наступної зупинки. Хлопчик бігає в чотири рази повільніше, ніж автобус і може побачити автобус на відстані *2 км*. До наступної зупинки рівно один кілометр. Чи є сенс йти, або є ризик?