

*Збірник задач для підготовки студентів  
до п'ятнадцятої обласної олімпіади  
з математики*

Львів – 2010

# I. Тотожні перетворення виразів

1. Обчислити значення виразу:

$$1.1. \left( \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} \right) \left( \frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right),$$

при  $x+y+z=0, (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, x \neq y, x \neq z, y \neq z)$ .

$$1.2. \sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1.3. \sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17+12\sqrt{2}}.$$

$$1.4. \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$$

$$1.5. \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

$$1.6. \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}.$$

2. Спростити вираз:

$$2.1. \frac{4x+|x|}{3x-|x|} + \frac{x-4|x|}{5x+|x|}.$$

$$2.2. \frac{x^2-7|x|+6}{x^2-3|x|+2} + \frac{8|x|}{x^2-4}.$$

$$2.3. 2a-1+|a|+|a-1|.$$

$$2.4. ||x-1|-2|+|x-3|+4|.$$

$$2.5. \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}, \text{ при } x = \frac{2ab}{b^2+1}, a > 0, b > 0.$$

$$2.6. \sqrt{\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}} + \sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}} - \frac{4}{\sqrt{a^2-x}}, \text{ при } x = 4(a-1), a \geq 1, a \neq 2.$$

$$2.7. \sqrt{\frac{\sqrt{(a-x)(x-b)} + \sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}}}, \text{ при } x = \sqrt{ab}.$$

3. Знаючи, що  $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \frac{4}{3}$  і  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , знайти  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{5x}{2}$ .

4. Знаючи, що  $\operatorname{tg} \alpha = m$ , знайти

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12} - 2\alpha\right).$$

5. Обчислити:

5.1.  $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)))$ ;

5.2.  $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha}$ , якщо  $\sin \alpha(\cos(\alpha + \beta)) = \sin \beta$ ;

5.3.  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}$ , якщо  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ;

5.4.  $\frac{4 \cos 17^\circ \cos 45^\circ \sin 13^\circ}{\sin 399^\circ}$ ;

5.5.  $\frac{2 + \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha}$ , якщо  $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 5$ .

6. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = 10 \cos^2 x - 6 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x.$$

7. Знайти найменше значення функції

$$y = 2(1 + \sin 3x \sin 2x) - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x).$$

8. Знайти залежність між  $x$  та  $y$ , виключивши  $\alpha$  зі

$$\text{співвідношень: } \begin{cases} x = 3 \cos \alpha \\ y = 4 \sin \alpha \end{cases}.$$

9. Знайти цілу частину числа  $\log_2 3 + \log_3 4$ .

10. Порівняти числа:  $\frac{10^{2008} + 1}{10^{2009} + 1}$  та  $\frac{10^{2009} + 1}{10^{2010} + 1}$ .

11. Порівняти числа:  $2009^{2009} \cdot 2010^{2010}$  та  $2009^{2010} \cdot 2010^{2009}$ .

12. Довести:

12.1.  $|\log_a b + \log_b a| \geq 2, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ .

12.2.  $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\lg \pi} > 4$ .

$$12.3. \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = 10 \log_b a.$$

12.4.  $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$ , якщо  $a, b, c$  – сторони прямокутного трикутника.

13. Обчислити значення  $\log_7 50$ , якщо  $\log_{14} 2 = a, \log_{14} 5 = b$ .

14. Обчислити значення  $\log_6 16$ , якщо  $\log_{12} 27 = a$ .

15. Відомо, що  $\log_a x = \alpha, \log_b x = \beta, \log_c x = \gamma, \log_d x = \delta$  і  $x \neq 1$ .

Знайти  $\log_{abcd} x$ .

16. Відомо, що  $\beta = 10^{\frac{1}{1-\lg \alpha}}$  і  $\gamma = 10^{\frac{1}{1-\lg \beta}}$ . Знайти залежність  $\alpha$  від  $\gamma$ .

17. Знаючи, що  $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$  і  $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$ , показати, що  $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$ .

18. Обчислити значення виразу:

$$18.1. \left( \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right)^{\log_9 7 \cdot \log_7 3}.$$

$$18.2. \lg \left( \sqrt[3]{1269 - 526\sqrt{5}} + \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}} \right).$$

$$18.3. \log_2 (\cos 20^\circ) + \log_2 (\cos 40^\circ) + \log_2 (\cos 80^\circ).$$

$$18.4. \frac{\log_{35}^2 7 - 2(\log_{35} 7) \cdot (\log_{35} 5) - 3 \log_{35}^2 5}{2(\log_{35} 7 - 3 \log_{35} 5)}.$$

19. Спростити вирази:

$$19.1. \frac{(\lg b \cdot 2^{\log_2 \lg b})^{\frac{1}{2}} \lg^{-\frac{1}{2}} b^2}{\sqrt{\frac{\lg^2 b + 1}{2 \lg b} + 1} - 10^{\frac{1}{2} \lg \left( \lg b^{\frac{1}{2}} \right)}}.$$

$$19.2. \left( b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}} \right)^{2 \log_{ab} (a+b)}.$$

20. Знайти  $x$ , якщо  $(\sqrt[3]{0,5} + \sqrt[3]{4})^x = 13,5$ .

## II. Рівняння

- $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81;$
- $20 \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right) = 0;$
- $2(x^2+x+1)^2 - 7(x^2-2x+1) - 13(x^3-1) = 0;$
- $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0;$
- $(x+2)(x-4)(x-7)(x-1) = 40;$
- $x^2 + \frac{9x^2}{(3+x)^2} = 7;$
- $x^2 + \frac{4x^2}{4+4x+x^2} = 5;$
- $0,2x^2 + \frac{5x^2}{x^2+10x+25} = 120;$
- $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1;$
- $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4;$
- $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4;$
- $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x+4+3\sqrt{2x-1}} = \sqrt{32};$
- $\sqrt{x+\sqrt{a^2+2a-3}} + \sqrt{x+a+\sqrt{1-2a+2a^2-a^3}} = a\sqrt{1-x};$
- $\sqrt[3]{(6x+7)^2} - \sqrt[3]{36x^2-49} = 2 \cdot \sqrt[3]{(6x-7)^2};$
- $\sqrt[3]{9x^2-49} - 2 \cdot \sqrt[3]{(3x+7)^2} = \sqrt[3]{(3x-7)^2};$
- $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = 2,5;$

17.  $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2;$

18.  $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2;$

19.  $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0;$

20.  $(x - 3)(x + 4)(x + 6)(x - 2) = 10x^2;$

21.  $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1;$

22.  $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6;$

23.  $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1;$

24.  $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82;$

25.  $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17;$

26.  $(2x - 3)^4 + (2x - 5)^4 = 2;$

27.  $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999;$

28. Знайти цілі розв'язки рівняння:  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2009};$

29.  $\left||x + 3| - 2\right| + \left||x - 2| - 3\right| = 4.$

30. Визначте кількість розв'язків рівняння  $\left|1 - \sqrt{|x - 2|}\right| = a$  залежно від значення параметра  $a$ .

31. Знайти значення  $a$ , при якому сума квадратів коренів рівняння  $x^2 - 3ax + a^2 = 0$  дорівнює 1,75.

32.  $\sqrt{\cos(x+1)} = \sqrt{\cos x}, x \in [0; 2\pi];$

33.  $\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{48}{35};$

34.  $\arcsin x + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4};$

35.  $2 \arcsin x = \arcsin \frac{10}{13} x$ ;
36.  $\frac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4} + 1 = 2 \operatorname{tg}^2 x$ ;
37.  $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = n$ ;
38.  $\sqrt{3} \sin 2x - \operatorname{tg} x = \sqrt{2\sqrt{3} - 4}$ ;
39.  $\sin x^2 - \sin x = 0$ ;
40.  $\operatorname{tg}(x+1) \operatorname{ctg}(2x+3) = 0$ ;
41.  $1 - \cos x = \sqrt{1 - \sqrt{4 \cos^2 x - 7 \cos^4 x}}$ .
42. Знайти невід'ємні значення  $x, y, z$ , такі що  $x + y + z = \pi$  і
- $$\frac{\sin x}{1} = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}.$$
43. Один із кутів прямокутного трикутника задовольняє рівняння  $\sin^3 x + \sin x \sin 2x - 3 \cos^3 x = 0$ . Показати, що трикутник рівнобедрений.
44. Знайти усі кути трикутника, які задовольняють рівняння  $(65 \sin x - 56)(80 - 64 \sin x - 65 \cos^2 x) = 0$ .
45. Відношення площі прямокутного трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, дорівнює  $k$ . Знайти суму тангенсів гострих кутів трикутника.
46.  $4^{\log_6 x} - 3^{\log_6 x - \frac{1}{2}} = 3^{\log_6 x + \frac{1}{2}} - 2^{2 \log_6 x - 1}$ .
47.  $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$ .
48.  $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x+1} = 1$ .
49.  $\frac{\log_{a^2 \sqrt{x}} a}{\log_{ax} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} ax = 0$ .

$$50. \log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{2}.$$

$$51. (x-3)^{x^2+x} = (x-3)^{7x-5}.$$

$$52. 3 \log_{a^2 x} x + \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2.$$

$$53. \sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$$

$$54. \frac{10x^{21g^2 x}}{x^3} = \frac{x^{31g x}}{10}.$$

$$55. \log_4(6 + \sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2|) = \frac{1}{2} + \log_2 |\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2||.$$

$$56. \log_{0,5 \sin 2x} \sin x = 0,5.$$

$$57. \log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = 0,25.$$

Розв'яжіть задачі:

58. Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2 і 3, а обернені величини відповідних знаменників пропорційні числам 1, 1/3 і 0,2. Знайти ці дроби, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює 136/315.
59. До задуманого цілого додатного числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75% цієї різниці і ще відняли задумане число. В результаті отримали нуль. Знайдіть задумане число.
60. Визначити ціле додатне число, якщо його записали цифрами і дописали справа цифру 4, тоді утворилося число, що ділиться без остачі на число, яке більше за шукане на 4, а у частці матимемо число, менше від дільника на 27.



- 61.** Добуток цифр двозначного числа втричі менший від самого числа. Якщо до цього числа додати 18, тоді отримаємо число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Знайти задане число.
- 62.** Знайти два числа, сума яких рівна 1244; якщо в кінці першого числа дописати цифру 3, а в кінці другого числа відкинути цифру 2, тоді утворяться два рівні числа.
- 63.** Знайти ціле число, якщо дописавши до нього справа цифру 2 отримали нове число, яке можна отримати із даного збільшеного на 200000 і потроївши його.
- 64.** Знайти чотири числа, які утворюють пропорцію, якщо сума крайніх членів рівна 14, сума середніх членів рівна 11, а сума квадратів чотирьох чисел рівна 221.
- 65.** Сім'я складається з батька, матері і трьох дочок. Усім разом 90 років. Різниця у віці дівчаток – 2 роки. Вік матері на 10 років більший за суму років дівчаток. Різниця років батька і матері дорівнює віку середньої дочки. Скільки років кожному члену сім'ї?
- 66.** Батько хоче розподілити 35 яблук між п'ятьма своїми дітьми. Половину всіх яблук він віддає синам, котрі розподіляють їх порівну, а другу половину віддає дочкам, які теж розподіляють їх порівну. Виявилось, що кожна дочка одержала на 3 яблука більше, ніж кожний син. Скільки у батька було синів і дочок?
- 67.** Змагаються три бригади лісорубів. Перша і третя бригади обробили деревини у 2 рази більше, ніж друга, а друга і третя – у 3 рази більше, ніж перша. Яка бригада вийшла переможцем у цьому змаганні?

### III. Нерівності

- $|x+5| - |x-3| \leq 4.$
- $|x-1| + |2-x| > 3+x.$
- $|2x+3| - |x-6| < 3.$
- $|2x-8| - 3|x+2| \leq 10.$
- $\frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|.$
- $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6.$
- $\sqrt{x(x+6)+9} - \sqrt{x^2-6x+9} > 1.$
- $\sqrt{x^2+8x+16} + \sqrt{25-x(10-x)} > 15.$
- $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}.$
- $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3.$
- $(1+x)\sqrt{x^2-1} > x^2-1.$
- $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} > \sqrt{5x+27}.$
- $2 < 2^{\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)^2} < 8.$
- $9^{1+\sin^2 x} + 30 \cdot 9^{\cos^2 x} \leq 117.$
- $\sqrt{18x-x^2} > \lg(\sin x).$
- $x^{\log_{0,2} 0,3} + 0,3^{\log_{0,2} x} \leq 0,18.$
- $x^{-3x-8} > x^7.$
- Якими мають бути значення  $m$ , щоби нерівність  $\frac{(m+2)x+8m}{x^2+1} < 1$  справджувалася при всіх додатних значеннях  $x$ ?
- Якими мають бути значення  $m$ , щоби нерівність  $-7 < \frac{x^2+(m+1)x-5}{x^2-x+1} < 3$  справджувалася при всіх дійсних значеннях  $x$ ?

## IV. Системи рівнянь і нерівностей

$$1. \begin{cases} \frac{x}{y}(x+y-2) = \frac{2}{3}; \\ \frac{y}{x}(x+y-1) = 9 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{10}{3}; \\ xy - 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 7x^2 - 14x + 15 + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} xy + yz = 3 \\ yz + zx = 10; \\ zx + xy = 9 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{3}{xy} + \frac{15}{yz} = 2 \\ \frac{5}{xz} + \frac{15}{yz} = 2; \\ \frac{3}{xy} + \frac{5}{xz} = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} = 5; \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{y+x} = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0; \\ 2x - |y| - 7 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 2|y| = 1; \\ 2|x| + 5y = -1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} |x+y|^{x^2+3x+2y-6} = 1; \\ x + |y| = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^2; \\ 4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \frac{x-y}{x^2+y^2}; \\ 2-y = \frac{x+y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} (1+y)^x = 100; \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1,5)} = 0,2; \\ \lg^{(x-y)}\sqrt{2x+3} = 0,1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^z = y^{\frac{8}{3}}; \\ y^z = x^{\frac{2}{3}}; \\ z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y}. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x^{x+y} = y^4; \\ y^{x+y} = x. \end{cases}$$

16. Скільки розв'язків має система рівнянь:

$$\begin{cases} y = \arcsin(\sin x); \\ (x - \pi)^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{2}. \end{cases}$$

17. Вкажіть всі значення параметра  $a$ , при яких система рівнянь  $\begin{cases} ax + 4y = 6 + a, \\ 2x + (2 + a)y = 8 \end{cases}$  має безліч розв'язків.
18. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому система рівнянь  $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 12x + a^2 y = a^2 - 4a \end{cases}$  не має розв'язку.
19. Знайдіть суму всіх значень параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} x - y + a = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.
20. Знайдіть найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому система рівнянь  $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  має два розв'язки.
21. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому система рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ |x| + y = a \end{cases}$  має розв'язком точно дві пари чисел.
22. Знайдіть суму всіх значень параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} |x - 12| + |y| = 1, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.
23. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} |x| + |y| = 9, \\ y - x^2 = a \end{cases}$  має єдиний розв'язок.
24. Знайдіть найменше ціле невід'ємне значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$  не має розв'язків.
25. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ 5y - x^2 + a^2 = 0 \end{cases}$  має лише три розв'язки.
26. Знайдіть найменше ціле додатне значення параметра  $a$ , при якому система  $\begin{cases} y = |x - 5| + |x + 6|, \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$  має два розв'язки.

27. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому система

$$\begin{cases} x \cdot y = 0, \\ (x-a)^2 + (y-4)^2 = 9 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок.}$$

Якщо таких значень декілька, то запишіть їх добуток.

28. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких система

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок.}$$

Якщо таких значень декілька, то запишіть їх добуток.

29. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому

$$\text{система рівнянь } \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x-7)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок.}$$

30. Вкажіть всі значення параметра  $a$ , при яких система

$$\text{рівнянь } \begin{cases} (a+2)x + 4y = a, \\ 3x + (a-2)y = 6 \end{cases} \text{ має безліч розв'язків.}$$

Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їх суму.

31. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких система

$$\begin{cases} (a+3)x + 4y = 3a - 5, \\ ax + (a-1)y = 2 \end{cases} \text{ не має розв'язків.}$$

Розв'яжіть системи нерівностей:

$$32. \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} < 4; \\ \sqrt{\frac{3x-4}{8-x}} > 1. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} \sqrt{32x+48} < x+9; \\ \sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} < 6. \end{cases}$$

34. Знайти всі значення параметра  $m$ , при яких система

$$\text{нерівностей } \begin{cases} x^2 + 2x + m \leq 0; \\ x^2 - 4x - 6m \leq 0 \end{cases} \text{ має лише один розв'язок.}$$

35. Знайти всі значення параметра  $m$ , при яких множиною

$$\text{розв'язків системи нерівностей } \begin{cases} x^2 + 6x + m \leq 0; \\ x^2 - 5x - 6 + m \leq 0 \end{cases} \in$$

відрізок, довжина якого дорівнює одиниці.

## V. Графіки функцій

Побудувати графіки функцій:

1.  $y = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$  .

2.  $y = x + |x-1| + \frac{|x-2|}{x-2}$  .

3.  $y = |x^2 - 4| - |x^2 - 9|$  .

4.  $y = \frac{x-1}{|x-1|} + \frac{|x+1|}{x+1} - \frac{1}{x}$  .

5.  $y = -2^{-|x|}$  .

6.  $|x| = \cos 2y$  .

7.  $|y| = \sin 2y$  .

8.  $\sin y = \sin x$  .

9.  $y = \operatorname{arccctg}(3-x)$  .

10.  $y = \operatorname{arccctg}(4-x^2)$  .

11.  $y = \log_2(\sin x \cos x)$  .

12.  $y = \log_2 \sin x$  .

13.  $|y| = \log_2(-x)$  .

14.  $y = \lg x + |\lg x|$  .

15.  $y = \frac{|\ln x|}{\ln x}$  .

16.  $y = x^{\log_x 2}$  .

17.  $y = e^{|\ln x|}$  .

18. Вкажіть точки координатної площини, що задовільняють рівняння:  $y + |y| = x + |x|$  .

## VI. Похідна

1. Обчислити найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = x^3 + ax^2 + x + 1$  зростає на всій числовій осі.
2. Обчислити найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = ax^3 + 2x^2 - x + 10$  спадає на всій числовій осі.
3. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція  $y = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 5$  зростає на всій числовій осі.
4. Обчислити найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому функція  $y = e^{ax} + ax$  зростає на всій числовій осі.
5. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція  $y = \cos x - ax$  спадає на всій числовій осі.
6. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція  $y = \sqrt{ax^3 - 12x^2 + 6x}$  зростає, якщо  $x > 0$ .
7. Знайти найменше і найбільше значення функції  $y = f(x)$  на заданому проміжку:
  - 7.1.  $y = 5^{3x} - 6 \cdot 5^{2x} + 9 \cdot 5^x$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ ;
  - 7.2.  $y = 2^{3x} - 15 \cdot 2^{2x-1} + 12 \cdot 2^x$ , якщо  $x \in [-1; 3]$ ;
  - 7.3.  $y = \log_3^3 x - 9 \log_3^2 x + 8 \log_3 x$ , якщо  $x \in [9; 243]$ ;
  - 7.4.  $y = \frac{2}{3} \log_3^3 x - \frac{9}{2} \log_2^2 x + 4 \log_2 x$ , якщо  $x \in [\frac{1}{2}; 32]$ .
8. Дослідити на монотонність функцію:
  - 8.1.  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ ;
  - 8.2.  $y = \sqrt{x^2 + 4x - 3}$ ;

8.3.  $y = \frac{x-9}{\sqrt{x-3}}$ ;

8.4.  $y = x + \ln(x^2 - 4)$ ;

9. Знайти критичні точки функції:

9.1.  $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(\cos x - \sin x) - \log_{\frac{1}{3}} 5$ .

9.2.  $f(x) = \ln(4x - x^2)$ .

10. Розв'язати нерівність  $f'(x) < g'(x)$ , якщо  $f(x) = x + 3\ln(x-2)$ ;  
 $g(x) = x + 5\ln(x-1)$ .

11. Знайти число, куб якого перевищує потрійний його квадрат на мінімальне значення.

12. Знайти додатне число, сума якого зі своєю оберненою величиною мала би найменше значення.

13. На сторінці книги друкований текст новин повинен займати  $S$  см<sup>2</sup>. Поля вгорі та знизу повинні мати по  $a$  см, а ліворуч і праворуч – по  $b$  см. Обчислити найекономніші розміри сторінки паперу.

14. Дано рівносторонній трикутник зі стороною  $a$ . Знайти довжину найменшого відрізка, який сполучає точки двох сторін цього трикутника і ділить трикутник на дві рівновеликі частини.

15. У чотиризначному числі сума сотень, десятків та одиниць дорівнює 14, сума цифр тисяч і одиниць дорівнює 9, цифра сотень більша від цифри десятків на 4. Серед усіх чисел, що задовільняють задані умови, знайти таке, в якого сума добутку цифри тисяч на цифру одиниць і добутку цифри десятків на цифру сотень буде найбільшою.



## VII. Планіметрія і стереометрія

1. Дано прямокутний трикутник з катетами 3 м і 4 м. Проведено круг так, що його діаметр збігається з більшим катетом. Обчислити площі частин круга, на які він розбивається гіпотенузою трикутника.
2. У правильний чотирикутник вписано круг, а всього вписано правильний п'ятикутник. Знайти відношення площ цих багатокутників.
3. У коло радіуса  $R$  вписано три рівні кола, які дотикаються до зовнішнього кола і попарно одне до одного. Обчислити площу фігури, обмеженої цими трьома колами.
4. У прямокутній трапеції висота дорівнює 6 м, на бічній стороні (не перпендикулярній до основ), як на діаметрі, побудовано коло так, що воно дотикається до протилежної сторони трапеції. Обчислити площу прямокутного трикутника, у якого катети дорівнюють основам трапеції.
5. Діагональ  $BD$  чотирикутника  $ABCD$  є діаметром описаного навколо нього кола. Знайти довжину діагоналі  $AC$ , якщо  $BD=2$  м,  $AB=1$  м, кут  $ABD$  відноситься до кута  $DBC$  як 4 до 3.
6. Дано трапецію з основами  $a$  і  $b$ . Знайти довжину відрізка  $MN$ , який з'єднує бічні сторони трапеції і паралельний до основ та ділить площу трапеції навпіл.
7. Коло, проведене на основі  $AD$  трапеції  $ABCD$  як на діаметрі, проходить через середини бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції та дотикається до основи  $BC$ . Знайдіть кути трапеції.

8. У паралелограмі зі сторонами  $a$  і  $b$  і гострим кутом  $\alpha$  проведені бісектриси чотирьох кутів. Знайти площу чотирикутника, вершинами якого служать точки перетину бісектрис.
9. У трикутнику  $ABC$  на стороні  $BC$  взято точку  $D$  так, що  $BD:DC=2:1$ . На стороні  $AC$  взято точку  $E$  так, що  $AD$  і  $BE$  перетинаються в точці  $O$  і  $BO:OE=3:1$ . Знайти відношення відрізків  $AE$  до  $EC$ .
10. З кінців сторони трикутника  $10$  см проведено дві медіани довжиною  $9$  см і  $12$  см. Знайти дві інші сторони трикутника.
11. Знайдіть площу трикутника, сторони якого утворені медіанами трикутника з площею  $S$ .
12. Дано дві сторони трикутника  $a$ ,  $c$ . Знайти третю сторону цього трикутника, якщо його площа дорівнює  $0,4ac$ .
13. У трапеції проведено діагоналі, які утворюють трикутник площею  $S_1$  та площею  $S_2$  при нижній основі трапеції. Знайти площу трапеції.
14. У коло вписано чотирикутник  $MNPQ$ , діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці  $F$ . Пряма, що проходить через точку  $F$  і середину сторони  $NP$ , перетинає сторону  $MQ$  в точці  $H$ . Знайдіть кут між прямими  $FH$  та  $MQ$ .
15. У коло радіуса  $R$  вписано трикутник з кутами  $15^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайти площу цього трикутника.
16. Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює  $90^\circ$ . Основи трапеції рівні  $a$  та  $b$ . Знайти довжину відрізка, що сполучає середини основ трапеції.

17. Точка дотику кола вписаного в прямокутний трикутник ділить гіпотенузу на дві частини  $m$  і  $n$ . Знайти площу даного трикутника.
18. У трикутнику  $ABC$  величини кутів  $B$  і  $C$  дорівнюють по  $40^\circ$ . Довести, що  $BC=BD+BA$ , якщо  $BD$  – бісектриса цього трикутника.
19. Дано два мимобіжні відрізки  $AB$  і  $CD$ . Знайти геометричне місце середин відрізків, які з'єднують кожну точку одного відрізка з кожною точкою іншого.
20. Чи можуть чотири площини поділити простір на 11 частин? Проілюструйте.
21. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки простору до всіх вершин куба з ребром  $a$  не менша від  $4\sqrt{3}a$ .
22. Довести, що не існує прямокутного паралелепіпеда, довжина діагоналі якого виражається натуральним числом, а довжини ребер – трьома послідовними натуральними числами.
23. Площа перерізу куба, що має форму правильного шестикутника, дорівнює  $Q$ . Знайти повну поверхню куба.
24. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Знайти повну поверхню паралелепіпеда.
25. Два правильні п'ятикутники  $ABCDE$  та  $AЕКPL$  розміщені у просторі так, що кут  $DAK$  дорівнює  $60^\circ$ . Визначити кут між площинами  $ACK$  та  $BAL$ .