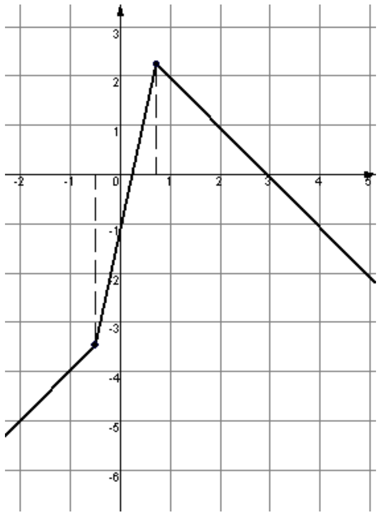
1. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{2}\left(\left| 1 + \sqrt{4 - x^2} \right| + \left| 1 - \sqrt{4 - x^2} \right| \right)$.

Відповідь та вказівки:

Представимо функцію у вигляді:
$y = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{(2x+1)^2} - \sqrt{(3x-2)^2} = |2x+1| - |3x-2|$. Отже,

$$y = \left[\begin{array}{l} x - 3, \; \textit{якщо} \; x \in (-\infty; -0{,}5), \\ 5x - 1, \; \textit{якщо} \; x \in \left[-0{,}5; \frac{2}{3} \right), \\ 3 - x, \; \textit{якщо} \; x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty \right). \end{array} \right.$$



2. Обчислити $ctg\alpha \cdot ctg(\alpha + \beta)$, якщо $\cos\beta = 17\cos(2\alpha + \beta)$.

Відповідь та вказівки:

$$ctg\alpha \cdot ctg(\alpha + \beta) = \frac{2\cos\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)}{2\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos(2\alpha + \beta) + \cos\beta}{\cos(2\alpha + \beta) - \cos\beta} = \frac{18\cos(2\alpha + \beta)}{16\cos(2\alpha + \beta)} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{8}$.

3. Знайти найменший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{3x + 4\sqrt{5}} \le \sqrt{5} + 2$.

Відповідь та вказівки:

ОДЗ: $3x > -4\sqrt{5} > -9 \Rightarrow x > -3$. Найменше ціле число, що задовольняє ОДЗ $x = -2$

Перевіримо, чи це значення задовольняє нерівність:
$\sqrt{3 \cdot (-2) + 4\sqrt{5}} = \sqrt{4\sqrt{5} - 6} < \sqrt{4\sqrt{5}} < \sqrt{12} < 4 < \sqrt{5} + 2$. Тобто найменший цілий розв’язок рівняння -2.

Відповідь: -2.

4. Всередині правильного трикутника ABC вибрано точку M . Нехай точки M_1 , M_2 , M_3 симетричні їй відносно сторін BC , AC , AB трикутника відповідно. Доведіть, що сума векторів $\overrightarrow{MM}_1 + \overrightarrow{MM}_2 + \overrightarrow{MM}_3$ дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Відповідь та вказівки:

Проведемо через точку M прямі, паралельні до сторін трикутника ABC. Нехай вони перетинають сторони AB, BC, AC в точках C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 відповідно (рис.). Отже, $C_1A_2 \parallel AC$, $A_1B_2 \parallel BA$, $B_1C_2 \parallel BC$, а також прямі C_1A_2, A_1B_2 та B_1C_2 перетинаються в точці M.

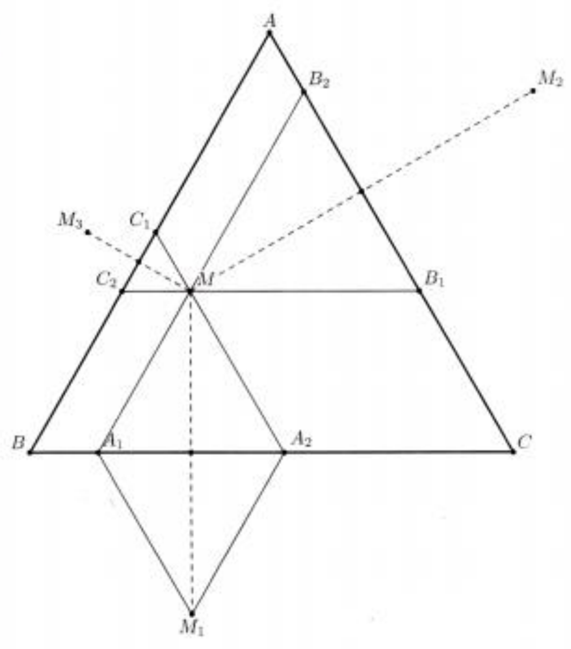
Розглянемо ΔA_1MA_2 – правильний.

Пряма M_1M містить його висоту, бо є перпендикулярною до BC. Тоді M_1M – це подвоєння його медіани, тому $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} = \overrightarrow{MM_1}$, аналогічно

$\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} = \overrightarrow{MM_2}$ та $\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} = \overrightarrow{MM_3}$. З іншого боку MC_1AB_2 – паралелограм, тому $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2}$.

Аналогічно $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}$ та $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1}$. Звідси й маємо шукане:

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3} =$$
$$= \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} =$$
$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$



5. У новосформованій групі коледжу деякі студенти виявилися вже знайомими між собою, а деякі – ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було 117 замріяних поглядів. Скільки в групі хлопців і скільки дівчат, якщо всього в групі не більше 40 студентів?

Відповідь та вказівки: 9 хлопців і 13 дівчат або 13 хлопців і 9 дівчат. Нехай у групі було x хлопців та y дівчат. У кожній парі дівчина-хлопець був рівно один замріяний погляд, тому

$xy = 117$. Оскільки $117 = 1 \cdot 117 = 117 \cdot 1 = 3 \cdot 39 = 39 \cdot 3 = 9 \cdot 13 = 13 \cdot 9$, тому умову задачі задовольняють $x = 9$, $y = 13$ або $x = 13$, $y = 9$.