

РОЗДІЛ I

Раціональні та ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи

→ Розв'язати рівняння, систему, нерівність:

1. $4x^2 + \frac{16x^2}{(x-2)^2} = 20$

2. $\frac{2x^2 - x + 3}{3} - \frac{2x^2}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{x}{6}$

3. $x^3 + 6x^2 = 2017 - 12x$

4. $\frac{1}{(x^2 - 2)^2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{40}{9x^4}$

5. $\frac{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[4]{5-x} - \sqrt[4]{x-2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{5-x}{x-2}}$

6. $\sqrt[3]{9x^2 - 49} + 2 \cdot \sqrt[3]{(3x+7)^2} = \sqrt[3]{(3x-7)^2}$

7. $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 2$

8.
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \\ xyz = 8 \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} xy + yz = 3 \\ yz + zx = 10 \\ zx + xy = 9 \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

11. $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 2017$

12. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$

13. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

14. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 5$

15. $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$

16. $(2x-1)(x-2)(2x^2 + 7x + 2) = -20x^2$

17. $\sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{25 - x(10 - x)} > 1$

18. $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}$

19.
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 3x^2 - 2y + 3\sqrt{3x^2 - 2y + 3} = 15 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

РОЗДІЛ II Спростення, обчислення, доведення

1. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ 2. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$
3. Спростити до числового значення вираз: $\sqrt{9-\sqrt{m-11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{5m+\sqrt{11-m}} + \sqrt{5}$
4. Спростити $\frac{x^4+x^2+x\sqrt{2}+2}{x^2-x\sqrt{2}+2} - x\sqrt{2}$
5. Знайти значення виразу $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{c+b} + \frac{b}{a+c}$, якщо $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{1}{4034}$ та $a+b+c=2017$
6. Знайти добуток $\left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{16}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{2017^2}\right)$
7. Спростити $||x-1|-2|+||x-3|+4|$
8. Знайти значення виразу $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}$
9. Обчислити $\frac{a^4+a^3+a^2+9}{a^5-a^2-a+6}$, якщо $a^3+a=1$
10. Спростити $x+1+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+10x+25}$
11. $\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17+12\sqrt{2}}$
12. Спростити вираз $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ при $x=\frac{2ab}{b^2+1}, a>0, b>0$
13. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{a}{\sqrt{2}}} + 2 - \frac{a^2\sqrt{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$ 14. $\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b} : a^{1/3}$
15. Числа a, b задовольняють рівність $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$. Знайти всі можливі значення виразу $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.
16. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ 17. $\sqrt{3(\sqrt{11}-\sqrt{8})} \cdot \sqrt[4]{19+4\sqrt{22}}$
18. Обчислити суму кубів двох чисел, якщо їх сума і добуток дорівнюють відповідно 11 і 21.
19. Обчислити $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+cb} + \frac{1}{1+c+ac}$, якщо $abc=1$
20. Обчислити $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

РОЗДІЛ III

Показникові та логарифмічні функції, рівняння, нерівності та їх системи

1. $(\log_3 2 + \log_2 81 + 4) \cdot (\log_3 2 - 2\log_{18} 2) \cdot \log_2 3 - \log_3 2$
2. Довести, що $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$, якщо a, b, c – катети і гіпотенуза прямокутного трикутника
3. Обчислити $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \dots \cdot \log_{\frac{1}{2016}} \frac{1}{2017} \cdot \ln 2$
4. Дано $\log_a x = p, \log_b x = q, \log_c x = n, \log_d x = m$. Знайти $\log_{abcd} x$.
5. $\left(\sqrt[8]{8 - \sqrt{63}}\right)^x + \left(\sqrt[8]{8 + \sqrt{63}}\right)^x = 16$
6. $2017^{\log_{2017} x + \log_{2017} x^2 + \log_{2017} x^3 + \dots + \log_{2017} x^8} = 36x^{34}$
7. $2017 \cdot 2016^{\log_{2016}^2 x} - x^{\log_{2016} x} = 2016^{\log_{\sqrt[3]{2016}} 2016}$
8. $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0,5} = 3^{\log_{16} x + 0,5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$
9. $\log_{|x|} \frac{2x^2 - x}{2} > 1$
10.
$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{x + y} = 2\sqrt{3} \\ (x + y)2^{y-x} = 3 \end{cases}$$
11. Побудувати графік функції $y = \log_{2017} x + |\log_{2017} x|$
12. $(x - 3)^{x^2 + x} = (x - 3)^{7x - 5}$
13. $3 \cdot 7^{2(\log_{\sqrt{5}} 7)^{-1}} - 3 \cdot \log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}} - 10$
14. Обчислити $\log_{ab} \frac{\sqrt{a}}{b} + \log_{\sqrt{ab}} b + \log_a \sqrt[3]{b}$, якщо $\log_a b = 2$
15. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \cdot \log_3 x = -1$
16. $\log_2 (2^x - 8) \cdot \log_2 (2^{x+1} - 16) = 12$
17. $\log_{5x} \left(\frac{5}{x}\right) + \log_5^2 x = 1$
18. $x^2 \cdot 5^{\sqrt{3x-2}} + 5^{2+x} = x^2 \cdot 5^x + 5^{\sqrt{3x-2}+2}$
19.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

РОЗДІЛ IV Тригонометричні функції, рівняння та нерівності

1. Обчислити $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$, якщо $tg\alpha + ctg\alpha = 5$
2. Знайти залежність між x та y , якщо
$$\begin{cases} x = 2016\cos\alpha \\ y = 2017\sin\alpha \end{cases}$$
3. Відношення площі прямокутного трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, рівне k . Знайти суму тангенсів гострих кутів трикутника.
4. Побудувати графік функції $|y| = 2017 \frac{|\sin x|}{\sin x}$
5. Розв'язати рівняння: $x^2 - \sin^2 y = 2x \cos y - 1 - y^2$
6. Розв'язати рівняння: $ctgx = \frac{|\sin x|}{\sin x}$
7. Знайти невід'ємні значення x, y, z такі, що $x + y + z = 180^\circ$ і $\sin x = \frac{\sin y}{\sqrt{3}} = \frac{\sin z}{2}$
8. Обчислити $\frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
9. Розв'язати рівняння: $\arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. Побудувати графік: $|x| = \cos 2y$
11. Побудувати графік: $y = \cos\left(\frac{x^2 - \pi nx}{x - \pi n}\right) - \sqrt{\cos^2 x}$
12. Обчислити $\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
13. Обчислити (у градусах): $\arccos\left(\sin \frac{50\pi}{9}\right) - 3\arctg\left(tg \frac{50\pi}{9}\right)$.
14. $4^{\sin x} + 4^{\cos x} = 2^{\sin x + \cos x + 1}$
15. $ctgx = \frac{|\sin x|}{\sin x}$
16. $(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \frac{1}{\cos 2x}$
17. Скільки різних цілих значень набуває функція $y = \sqrt{8(\sin^2 2x + \cos^2 2x - 2\sin 2x \cos 2x)}$?
18. Знайти множину значень функції $f(x) = \cos x + \sqrt{-\cos^2 3x}$
19. Побудувати графік функції $y = ctgx \cdot |\sin x|$
20. Побудувати графік функції $y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x$

РОЗДІЛ V

Алгебраїчні рівняння, нерівності та системи з модулями та параметрами

1. $|x - 2| + |x - 3 + |2x - 8|| - 9 = 0$. 2. $||x + 3| - 2| + ||x - 2| - 3| = 4$.
3. $|2x + 1| + |5 - 3x| + 1 - 4x = 0$. 4. $||x + 1| - |x - 3|| = |x|$.
5. Розв'язати нерівність: $|3 - |x - 2|| \leq 1$.
6. При яких значеннях x функція $y = |x - 1| + |x - 3|$ набуває найменшого значення? Знайти ці значення функції.
7. За якого найменшого значення параметра a , функція $f(x) = \lg(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$ буде непарною?
8. При якому значенні a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$
9. При якому значенні m система має розв'язок, якщо

$$\begin{cases} 2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0; \\ 4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0? \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} |x + 3| + |y - 2| = 5 \\ |x + 3| = 2y - 4 \end{cases}$$
 11. Розв'язати рівняння: $||x + 3| - 2| + ||x - 2| - 3| = 4$
12. Розв'язати нерівність: $||x + 5| - |x - 3|| \leq 4$ 13.
$$\frac{|x^2 - 4|(x - 1)}{|x|(x - 2016)^2(x + 2017)^3} \geq 0$$
14. Побудувати графік функції: $x + |x| = y + |y|$
15. Визначити кількість цілих розв'язків рівняння $|1 - \sqrt{|x - 2|}| = a$ залежно від значень параметра a .
16. Чому дорівнює площа фігури, заданої нерівністю $|x - y| + |x + y| \leq 2$?
17. При якому найбільшому цілому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (x - a)^2 = 9 - y^2 \end{cases}$$
 має тільки два різні розв'язки?
18. При якому найменшому значенні параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} |x| + |y| = 5 \\ 5y - x^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$
 має тільки три розв'язки?
19. Знайти суму всіх значень параметра m , при яких система

$$\begin{cases} |x - 12| + |y| = 1 \\ (x - m)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок.
20. Визначити кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2017 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$
 залежно від значень параметра a .

РОЗДІЛ VI Похідна та її застосування

1. Обчислити найменше ціле значення параметра a , при якому функція $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ зростає на всій числовій осі.
 2. Розв'язати рівняння $f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 0$, якщо $f(x) = x^3 \ln x$
 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 5^{3x} - 6 \cdot 5^{2x} + 9 \cdot 5^x$, на $[-1; 1]$
 4. Розв'язати нерівність $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x) = x + 3 \ln(x - 2)$, $g(x) = 5 + \ln(x - 1)$ 5.
- Знайти суму коренів рівняння $f(x) + 4f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$
6. Знайти кутовий коефіцієнт нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x^2}{2017} \cdot \sqrt{\sin^{2017}(\arctg 2017x + \operatorname{arcctg} 2017x)}$ в точці $x_0 = 2017$.
 7. При якому значенні параметра a функція $f(x) = (a - 12)x^3 - 3(a - 12)x^2 + 6x + 7$ зростає на $x \in \mathbb{R}$?
 8. Знайти критичні точки функції $f(x) = 0,5e^{2x} + (1 - a)e^x - ax + \cos 2017 \cdot 2016$
 9. Знайти квадрат відстані між точками графіка функції $y = \frac{x^2}{x - 2}$, в яких дотичні до цього графіка є паралельні до осі абсцис.
 10. При якому значенні параметра $a > 0$ параболи $y = 3x^2 - 12x + 15$ та $y = -2x^2 - 8ax + 1$ мають спільну дотичну, паралельну до осі абсцис?
 11. Визначити суму координат точки, яка лежить на прямій $y = \frac{2}{3}x + 5$, якщо різниця квадратів абсциси й ординати точки є найменшою.
 12. Визначити абсцису точки на прямій $y = 2x + 3$, відстань до якої від заданої точки $A(4; 2)$ є найменшою.
 13. Визначити значення параметра a , при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax - a - 2$ буде найменшою.
 14. Розв'язати рівняння: $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, якщо $f(x) = \frac{1}{1 - x}$.
 15. Розв'язати рівняння: $f'(x) = 2f(x)$, якщо $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 3x + 1)$.
 16. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x(\ln x - 1)$ у точці з абсцисою $x = e$.
 17. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 2x \cdot |x - 2|$ на відрізку $[0; 3]$
 18. Знайти число, куб якого перевищує його потрійний квадрат на мінімальне значення.
 19. Знайти додатне число, сума якого зі своєю оберненою величиною мала б найменше значення.

РОЗДІЛ VII Планіметрія

1. Три круглих столи однакових розмірів розставили таким чином, що кожен з них дотикається до двох інших. Яка площа утвореної дірки?
2. В трапецію вписано коло радіуса r . Знайти площу трапеції, якщо кути при більшій основі рівні α та β .
3. У правильний чотирикутник вписано круг, а у нього вписано правильний п'ятикутник. Знайти відношення площ цих многокутників.
4. У прямокутній трапеції висота рівна 6м. На бічній стороні (не перпендикулярній до основ), як на діаметрі, побудовано коло так, що воно дотикається до протилежної сторони трапеції. Обчислити площу прямокутного трикутника, у якого катети дорівнюють основам трапеції.
5. З кінців сторони трикутника, довжина якої 10 см, проведено дві медіани довжиною 9 см і 12 см. Знайти дві інші сторони трикутника.
6. Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює 90° . Основи трапеції рівні a і b . Знайти довжину відрізка, що сполучає середини основ трапеції.
7. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на дві частини m і n . Знайти площу даного трикутника.
8. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата, як на діаметрах, всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру "квітка". Доведіть, що загальна площа "квітки" дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.
9. Діагоналі опуклого чотирикутника рівні a і b . Відрізки, які сполучають середини протилежних сторін рівні. Знайти площу чотирикутника.
10. Бісектриса одного з гострих кутів прямокутного трикутника в точці перетину з висотою, опущеною на гіпотенузу, ділиться на відрізки, відношення довжин яких рівне $1 + \sqrt{2}$, рахуючи від вершини. Знайти величини гострих кутів трикутника.
11. На продовженні AB, BC, AD і CD сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ відкладено відрізки $BB_1 = AB, CC_1 = BC, AA_1 = AD, DD_1 = CD$. Довести, що площа чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$ у п'ять разів більша за площу чотирикутника $ABCD$.
12. Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють S_1 та S_2 . Знайти площу трапеції.
13. Медіани трикутника задовольняють умову $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ (m_a, m_b, m_c – медіани трикутника). Визначити тип трикутника.
14. У прямокутний трикутник вписане коло. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки x і y . Довести, що площа трикутника $S = xy$.
15. Визначити кут в ромбі, якщо його площа дорівнює Q , а площа вписаного круга дорівнює S .
16. Довжини паралельних сторін трапеції дорівнюють відповідно 25см та 4 см, а довжини непаралельних сторін 20 см, і 13 см. Знайти площу трапеції.
17. Знайти висоту прямокутної трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює більшій основі, площа трапеції дорівнює S , а гострий кут дорівнює α .
18. У трикутнику ABC медіани AD і BE перетинаються під прямим кутом. $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Знайти сторону AB цього трикутника.

19. Квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата, як на діаметрах, всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру «квітка». Довести, що загальна площа «квітки» дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

20. Площа S трикутника обчислюється за формулою $S = p(p - c)$, де p – півпериметр, c – довжина сторони. Довести, що цей трикутник – прямокутний.

Розділ VIII Евристичні задачі

1. Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2 і 3, а обернені величини відповідних знаменників пропорційні числам 1, $1/3$ і $0,2$. Знайти ці дроби, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює $136/315$.

2. До задуманого цілого додатного числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75% цієї різниці і ще відняли задумане число. В результаті отримали нуль. Знайдіть задумане число.

3. Визначити ціле додатне число, якщо його записали цифрами і дописали справа цифру 4, тоді утворилося число, що ділиться без остачі на число, яке більше за шукане на 4, а у частці матимемо число, менше від дільника на 27.

4. Добуток цифр двозначного числа втричі менший від самого числа. Якщо до цього числа додати 18, тоді отримаємо число, записане тими ж цифрами, але у зворотному порядку. Знайти задане число.

5. Знайти два числа, сума яких рівна 1244; якщо в кінці першого числа дописати цифру 3, а в кінці другого числа відкинути цифру 2, тоді утворяться два рівні числа.

6. Один камінь сапфіру і два камінці топазу вдвічі дорожчі за смарагд. А сім сапфірів і один топаз, цінніші у 8 разів від того ж таки смарагду. Який з цих каменів дешевший – сапфір, топаз чи смарагд?

7. Знайти тризначне число, якщо відомо, що сума його цифр дорівнює 17, а сума квадратів його цифр дорівнює 109. Якщо від цього числа відняти 495, то одержимо число, записане тими ж цифрами, але у зворотньому порядку.

8. Студенти різних факультетів університету організували естрадний квартет. Михайло у ньому грає на саксофоні. Піаніст вчиться на фізичному факультеті. Ім'я ударника не Валерій, а у студента географічного факультету ім'я не Леонід. Михайло вчиться не на історичному факультеті. Андрій не піаніст і не біолог. Валерій вчиться не на фізичному факультеті, а ударник не на історичному. Леонід грає не на контрабасі. На якому інструменті грає Валерій і на якому факультеті він вчиться?

9. Обчислити $20162016 \cdot 201720172017 - 20172017 \cdot 201620162016$.

10. Сільський гіпнотизер Панас Панасович розводить курей та індиків. Внаслідок його експериментів десята частина курей вважає, що вони – індики, а десята частина індиків вважає, що вони – кури. Якщо брати загалом, то п'ята частина птахів Панаса Панасовича вважає себе індіками. А якою насправді є частка індиків у його господарстві?

11. Сім'я складається з батька, матері і трьох доньок. Усім разом 90 років. Різниця у віці дівчаток – 2 роки. Вік матері на 10 років більший за суму років дівчаток. Різниця років батька і матері дорівнює віку середньої доньки. Скільки років кожному члену сім'ї?

12. Є 10 мішків і у кожному з них по 10 золотих монет. Кожна монета важить 10 грамів. Є один мішок, в якому всі монети фальшиві і важать по 9 грамів. Як за одне зважування визначити, у якому мішку фальшиві монети?

13. Знайти тризначне число, якщо відомо, що сума його цифр дорівнює 17, а сума квадратів його цифр дорівнює 109. Якщо від цього числа відняти 495, то одержимо число, записане тими ж цифрами, але у зворотньому порядку.

14. У новосформованій групі деякі студенти виявилися вже знайомими між собою, а деякі – ні. У перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилась на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожний хлопець замріяно подивився на кожну із незнайомих дівчат. Всього було кинуту 117 замріяних поглядів. Скільки в групі хлопців і скільки дівчат, якщо у групі не більше 40 студентів?

15. Обчислити $\left(\underbrace{999\dots9}_{16}\right) : \left(\underbrace{999\dots9}_{8}\right) - 1$

16. Порівняти числа $\frac{2016^{2017} + 1}{2016^{2016} + 1}$ та $\frac{2016^{2016} + 1}{2016^{2015} + 1}$

17. Знайти двозначне число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11, і більше за їх подвоєний добуток на 5

18. Знайти чотирицифрове число за такими умовами: 1) сума квадратів крайніх цифр дорівнює 13, 2) Сума квадратів середніх цифр дорівнює 85 3) якщо від шуканого числа відняти 1089, то отримаємо число, записане такими ж цифрами, що і шукане, але у зворотньому порядку.

19. Одного разу студента запитали, скільки йому років? Оскільки студент добре знав математику, він відповів так: 1 січня цього року мені виповнилося

$\left(-\log_2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64}\right)\right)$ років. Скільки років студенту?

20. У класі є 38 учнів. З них 16 захоплюються математикою, 17 фізикою, 18 історією. Захоплюються двома предметами – математикою і фізикою четверо, математикою та історією – 3, фізикою та історією – 5 учнів. Троє не захоплюються жодним предметом. Скільки учнів захоплюються одночасно трьома предметами? Лише одним з цих предметів?