

## ЛЕКЦІЯ № 3

**Тема заняття:** Піраміда. Побудова піраміди та її перерізів. Зрізана піраміда.  
*Правильна піраміда*

**Мета заняття:** формування понять піраміда, основа, вершина, бічні ребра, висота піраміди, вмінь учнів знаходити елементи піраміди. формування понять переріз піраміди, діагональний переріз, умінь будувати піраміди та їх перерізи. вивчення властивості площини, яка перетинає піраміду і паралельна основі; формування поняття зрізаної піраміди. Формування понять правильна піраміда, апофема піраміди; вивчення властивостей правильної піраміди

**Обладнання:** моделі пірамід.

**Література:** Істер. О. С. «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти – К.: «Генеза», 2019.

### I. Перевірка домашнього завдання

Перевірити розв'язання задач(математичного диктанту, по варіантам)

### II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Пояснення нового матеріалу можна провести так, як це зроблено в п. 47 § 5 підручника. Можливий інший варіант подачі нового матеріалу.

#### 1. Піраміда

**$n$ -кутною пірамідою** називається многогранник, одна грань якого — довільний  $n$ -кутний, всі інші  $n$  граней — трикутники, що мають спільну вершину.

Демонструються моделі пірамід.

Спільну вершину трикутних граней називають **вершиною** піраміди, протилежну їй грань — **основою**, а всі інші грані — **бічними гранями** піраміди.

Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають бічними ребрами.

Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи, називають **висотою** піраміди. Висотою також називають і довжину цього перпендикуляра.

На рис. 64 зображено чотирикутну піраміду  $SABCD$ ; точка  $S$  — її вершина,  $ABCD$  — основа;  $SA, SB, SC, SD$  — бічні ребра;  $AB, BC, CD, AD$  — ребра основи,  $SO$  — висота. Трикутну піраміду називають також **тетраедром**.

Суму площ усіх бічних граней піраміди називають **площею бічної поверхні піраміди**.

Щоб знайти площу всієї поверхні піраміди, треба до площі  $S_{\text{біч}}$  її бічної поверхні додати  $S_{\text{осн}}$ , площу основи:

$$S_{\text{пір}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}} .$$

#### **Розв'язування задач**

1. Скільки граней, ребер має  $n$ -кутна піраміда?

(Відповідь,  $n+1$  граней,  $2n$  ребер.)

#### **Розв'язання задачі № 42**

Нехай  $SABCD$  — піраміда, у якої  $ABCD$  —

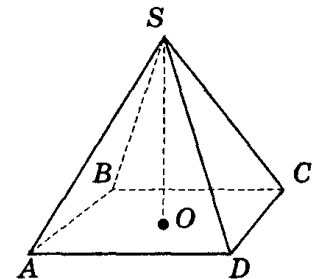


Рис. 64

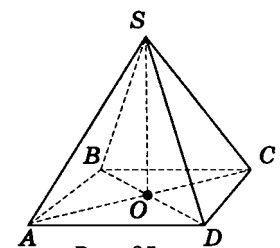


Рис. 65

прямокутник;  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $SA = SB = SC = SD = 13$  см;  $SO \perp (ABC)$  (рис. 65).

Точка  $O$  — точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$ . (?)<sup>1</sup>

$$\text{Із } \triangle ABC \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см). (?)}$$

Знаком (?) позначено в розв'язанні місця, які потребують теоретичного обґрунтування.

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (см). (?)}$$

$$\text{Із } \triangle AOS \quad SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см). (?)}$$

Відповідь. 12 см.

### Розв'язання задачі

Нехай  $SABC$  — піраміда, у якої  $ABC$  — основа,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см;  $SO \perp (ABC)$  (рис. 66). Проводимо  $OM \perp AB$ ,  $ON \perp BC$ ,  $OP \perp AC$ , тоді  $SM \perp AB$ ,  $SN \perp BC$ ,  $SP \perp AC$ . (?) Отже,  $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO = 60^\circ$ . (?) Із рівності цих кутів випливає, що точка  $O$  — центр кола, вписаного в основу. (?) Із  $\triangle ABC \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  (см). (?)

$$OM = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2 \text{ (см) (?)}$$

$$\text{Із } \triangle SON : SO = ON \operatorname{tg} \angle SNO = 2 \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (см) (?)}$$

Відповідь.  $2\sqrt{3}$  см.

### 2. Правила зображення піраміди

Зображення піраміди можна починати із зображення її основи. Правила зображення багатокутників нам відомі. Згадаємо їх.

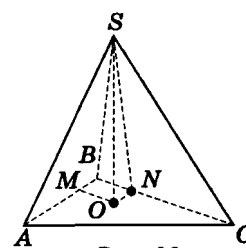
#### Запитання до групи

- 1) Як зображуються рівносторонній, рівнобедрений, прямокутний трикутники?
- 2) Що є зображенням паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата)?
- 3) Що є зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної)?
- 4) Що є зображенням довільного чотирикутника (не паралелограма і не трапеції)?
- 5) Що є зображенням правильного шестикутника?

Після зображення основи позначають вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи, невидимі ребра зображують штриховими лініями. Для більшої наочності рисунка висоту піраміди зображують «вертикальним відрізком».

#### Виконання вправ

1. Побудуйте зображення тетраедра.
2. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник, а основа висоти є точкою перетину діагоналей прямокутника.
3. Побудуйте зображення трикутної піраміди, в основі якої лежить правильний



<sup>1</sup> Знаком (?) позначено в розв'язанні місця, які потребують теоретичного обґрунтування.

трикутник, а основа висоти є центром трикутника основи.

4. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить квадрат, а одне з бічних ребер перпендикулярне до основи.
5. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить ромб, а одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи.

### 3. Правила побудови перерізів піраміди

Побудова перерізу піраміди зводиться, як правило, до побудови прямих, які є прямими перетину заданої січної площини з площинами граней піраміди.

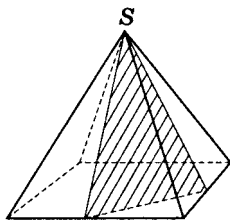


Рис. 70

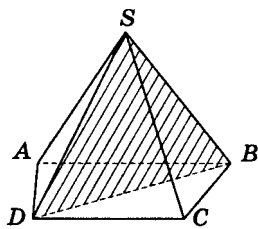


Рис. 71

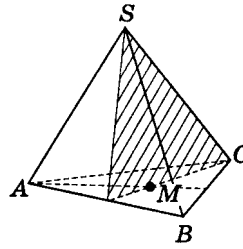


Рис. 72

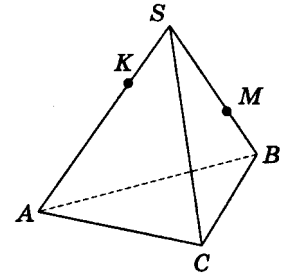


Рис. 73

#### **Виконання вправ**

1. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною  $MNK$  (рис. 68, с. 65)
2. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  — середини ребер  $SB$ ,  $BC$ ,  $AC$  відповідно (рис. 69, с. 65). Перерізами піраміди площинами, які проходять через її вершину є трикутники (рис. 70).

**Діагональним перерізом** піраміди називається переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідні бічні ребра піраміди (рис. 71).

#### **Виконання вправ**

1. Доведіть, що діагональні перерізи піраміди — трикутники.
2. Скільки діагональних перерізів можна провести в  $n$ -кутній піраміді ( $n > 3$ ) ?  
(Відповідь.  $\frac{n(n-3)}{2}$ .)
3. Доведіть, що переріз, який проходить через висоту піраміди, перпендикулярний до площини її основи.
4. Побудуйте переріз тетраедра  $SABC$  площиною, яка проходить через ребро  $SC$  і точку перетину медіан грані  $ABC$ . (Відповідь. Рис. 72).
5. Знайдіть точку перетину прямої  $KM$  з площиною основи піраміди  $SABC$  (рис. 73).
6. Побудуйте пряму перетину площини  $KMN$  з площиною основи піраміди  $SABC$  (рис. 74). (Відповідь. Шукана пряма  $XK$ , рис. 75.)

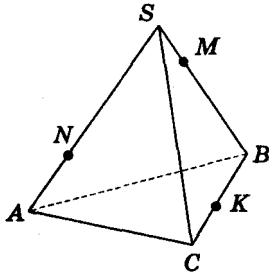


Рис. 74

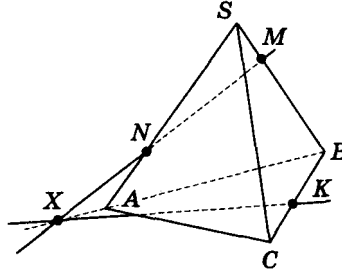


Рис. 75

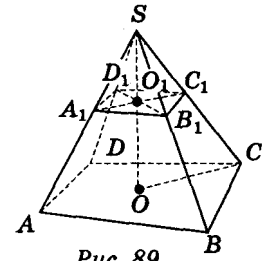


Рис. 89

#### 4. Теорема про властивість площини, яка перетинає піраміду і паралельна основі піраміди.

Формулюється й доводиться теорема 5.5 так, як це зроблено у підручнику. Після доведення теореми слід зробити і записати в зошити такі наслідки (рис. 89):

1. Переріз піраміди площиною, яка паралельна до площини основи, є багатокутник, подібний даному:  $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ .

2. Бічні ребра і висота піраміди діляться площиною, яка паралельна до основи піраміди, на пропорційні відрізки:

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S} = \frac{DD_1}{D_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}.$$

3. Площі перерізу і основи піраміди відносяться як квадрати їх відстаней від

вершини: 
$$\frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}.$$

Оскільки  $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ , то 
$$\frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}.$$

$\triangle A_1SO \sim \triangle ASO$  і  $\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB_1$ , тому 
$$\frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1S}{AS} \quad \text{і} \quad \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS}, \quad \text{звідси}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1S}{OS} \quad \text{Отже,} \quad \frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}.$$

#### 5. Поняття зрізаної піраміди

**Зрізаною пірамідою** називається частина піраміди, що обмежена основою і січною площиною, яка паралельна основі.

*Демонструються моделі зрізаних пірамід.*

Паралельні грані зрізаної піраміди називають її **основами**, а всі інші — **бічними** гранями.

Основи зрізаної піраміди — подібні багатокутники, їх відповідні сторони попарно паралельні, тому бічні грані зрізаної піраміди — трапеції.

**Висотою** зрізаної піраміди називають перпендикуляр, проведений із якої-небудь точки однієї основи на площину другої основи. Висотою зрізаної піраміди називають також відстань між площинами її основ.

Переріз площиною, яка проходить через два бічні ребра зрізаної піраміди, які не лежать в одній грані, називається **діагональним**.

Щоб побудувати зрізану піраміду, спочатку будують повну піраміду, проводять переріз, паралельний основі, а потім зайву верхню частину стирають (рис. 90).

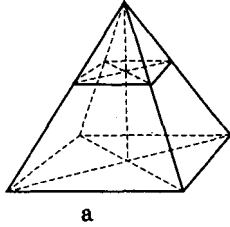
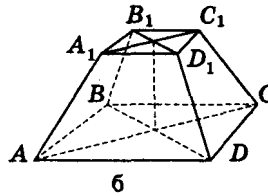


Рис. 90



## 6. Поняття правильної піраміди

**Правильною пірамідою** називається піраміда, в основі якої лежить правильний багатокутник, а основа висоти піраміди збігається з центром цього багатокутника.

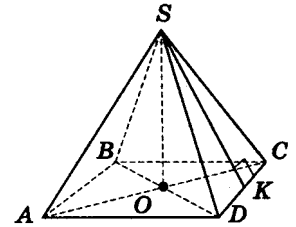


Рис. 92

**Демонструються моделі правильних пірамід.**

Нехай  $SABCD$  — правильна чотирикутна піраміда (рис. 92). Тоді за означенням її основа  $ABCD$  — правильний чотирикутник (квадрат); центр квадрата точка  $O$  — основа висоти  $SO$  піраміди.

Пряма, яка містить висоту піраміди, називається **віссю правильної піраміди**.

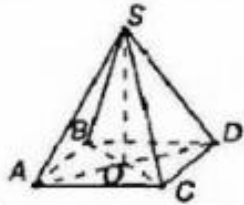
На рис. 92 пряма  $SO$  — вісь правильної піраміди  $SABCD$ .

Висота бічної грані правильної піраміди, яка проведена з вершини піраміди, називається **апофемою**. На рис. 92  $SK$  — апофема.

При повороті навколо осі на кут  $\frac{360^\circ}{n}$  правильний  $n$ -кутник (основа правильної  $n$ -кутної піраміди) кожен раз суміщається із собою, тоді суміщається із собою і правильна  $n$ -кутна піраміда. Звідси випливає, що у правильної піраміди:

- 1) бічні ребра рівні;
- 2) бічні грані рівні;
- 3) апофеми рівні;
- 4) двогранні кути при основі рівні;
- 5) двогранні кути при бічних ребрах рівні;
- 6) кожна точка висоти правильної піраміди рівновіддалена від всіх вершин основи;
- 7) кожна точка висоти правильної піраміди рівновіддалена від усіх бічних граней.

Задача № 57 (с. 80).



Высота правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Так как основание данной пирамиды — квадрат, то  $O$  — точка пересечения диагоналей.

Так что  $OC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  (см).

Далее, в прямоугольном  $\triangle SOC$  по теореме Пифагора находим

$$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9 \text{ (см)}.$$

Ответ: 9 см.

### III. Домашнє завдання

§ 3, ст – 195-201; контрольні запитання ст. 201.

Задачі № 3.6, 3.8, 3.10, 3.14, 3.16, 3.22, 3.24, 3.24 ст.- 201-206.

### IV. Підведення підсумку заняття

#### Запитання до групи

- 1) Дайте означення піраміди (основи піраміди, бічних граней, ребер, висоти).
- 2) Вічні ребра піраміди рівні. У яку точку проектується її вершина?
- 3) Чи може вершина піраміди проектуватися в точку зовні основи, якщо бічні ребра рівні?
- 4) Бічні грані піраміди однаково нахилені до основи. У яку точку основи проектується її вершина?
- 5) Скільки бічних граней, перпендикулярних до площини основи, може мати піраміда?
- 6) Серед наведених нижче тверджень укажіть правильні:
  - а) існує піраміда, яка має 125 ребер;
  - б) існує піраміда, яка має 125 граней;
  - в) якщо в піраміді бічні ребра утворюють з висотою рівні кути, то її вершина проектується в центр кола, вписаного в основу;
  - г) якщо висоти всіх бічних граней, проведені із вершини піраміди, рівні, то основа висоти — центр кола, вписаного в основу;
  - д) якщо бічні ребра піраміди рівні і в основі лежить тупокутний трикутник, то основа висоти лежить поза основою;
  - е) якщо бічні ребра піраміди рівні і в основі лежить прямокутний трикутник, то основа висоти піраміди лежить всередині основи;
  - є) піраміда може мати дві бічні грані, які перпендикулярні до основи;
  - ж) піраміда може мати три бічні грані, які перпендикулярні до основи;
  - з) якщо одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основи, то висота піраміди збігається з висотою однієї грані;
  - й) піраміда може мати два бічні ребра, перпендикулярні до основи;
  - і) сума всіх плоских кутів  $n$ -кутної піраміди дорівнює  $360^\circ(n - 1)$ ;
  - к) існує піраміда, яка має 18 плоских кутів.

*Відповідь.* а) Ні; б) так; в) ні; г) так; д) так; е) ні; є) так; ж) ні; з) так; й) ні; і) так; к) ні.

1) Якою фігурою є переріз піраміди площинами, які проходять через її

вершину?

2) Що таке діагональний переріз піраміди?

3) Якою фігурою є діагональний переріз піраміди? Чому?

4) Які методи побудови перерізів піраміди вам відомі? У чому їх суть?