

ЛЕКЦІЯ № 2

Тема заняття: Паралелепіед, їх види та перерізи.

Мета заняття: формування понять: паралелепіед, прямий і похилий паралелепіед; вивчення властивостей граней, діагоналей паралелепіеда. формування понять: прямокутний паралелепіед, куб, лінійні виміри прямокутного паралелепіеда; вивчення властивостей діагоналей прямокутного паралелепіеда.

Обладнання: моделі паралелепіедів, схема «Види паралелепіедів».

Література: Істер. О. С. «Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)» підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти – К.: «Генеза», 2019.

Хід заняття

I. Перевірка домашнього завдання

Математичний диктант

У похилій призмі всі ребра дорівнюють a . Одна із вершин верхньої основи проектується в центр кола, описаного навколо нижньої основи. В основі призми лежить:

варіант 1 — трикутник (рис. 53);

варіант 2 — квадрат (рис. 54).

Знайдіть:

а) радіус кола, описаного навколо основи; (2 бали)

б) висоту призми; (2 бали)

в) радіус кола, вписаного в основу; (2 бали)

г) висоту ромба AA_1B_1B ; (2 бали)

д) площу грані AA_1B_1B ; (2 бали)

е) величину кута A_1AB . (2 бали)

Відповідь. Варіант 1. а) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; е) 60° .

Варіант 2. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$; е) 60° .

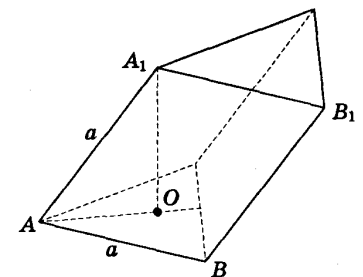


Рис. 53

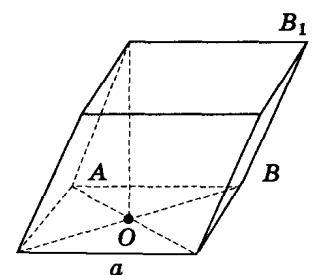


Рис. 54

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1. Види паралелепіедів

Паралелепіедом називається призма, основа якої — паралелограм.

Демонструються моделі паралелепіедів.

Усі шість граней паралелепіеда — паралелограми (рис. 54). Протилежні грані паралелепіеда рівні й лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні й паралельні (чому?).

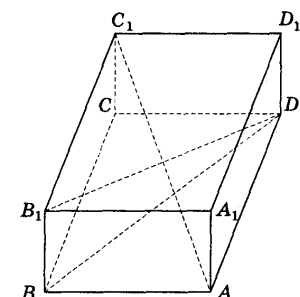


Рис. 55

Розглядаємо теорему 1. Доведення цієї теореми нескладне, тому можна запропонувати студентам довести її самостійно або розібрати доведення її за підручником, а потім проаналізувати.

Далі вивчаємо питання про властивість діагоналей паралелепіпеда.

Паралелепіпеди можуть бути прямими і похилими (схема «Види паралелепіпедів»),

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається **прямим паралелепіпедом**. У ньому всі бічні грані— прямокутники, а основи — паралелограми.

Демонструються моделі прямих паралелепіпедів.

Якщо бічні ребра паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, то паралелепіпед називається **похилим**.

Демонструються моделі похилого паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається **прямокутним паралелепіпедом** (схема «Види паралелепіпедів»).

Демонструються моделі прямокутних паралелепіпедів.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні. Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його розмірами (вимірами). У прямокутного паралелепіпеда **три** лінійні виміри.

Прямокутний паралелепіпед, у якого лінійні виміри рівні, називається **кубом**.

Демонструється модель куба.

Далі формулюємо й доводимо теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.

Наводимо зразки записів на дошці і в зошитах студентів.

Теорема

Д а н о : $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед; $A_1 C = d$, $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ (рис. 58).

Д о в е с т и : $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Доведення

Із $\triangle AOC$ $AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + b^2$.

Із $\triangle AA_1C$ $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

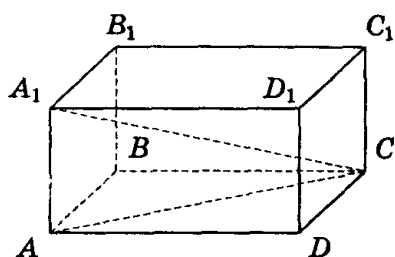


Рис. 58

Розв'язування задач

Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a . Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

Розв'язання

Нехай у паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 57) $ABCD$ — квадрат, $A_1 O \perp (ABC)$, точка O — центр квадрата, $A_1 O = H$, $AB = a$.

Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$; тоді $A_1 K \perp AD$, $A_1 M \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри), тобто $A_1 K$ і $A_1 M$ — висоти бічних граней $ADD_1 A_1$ та

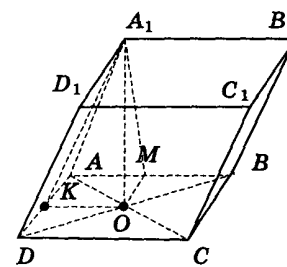


Рис. 57

$ABB_1 A_1$ відповідно. $\Delta A_1 OK = \Delta A_1 OM$ ($A_1 O$ — спільний катет і $OK = OM = \frac{a}{2}$); звідси: $A_1 K = A_1 M$. Оскільки $AD = AB$ і $A_1 K = A_1 M$, то $S_{ABB_1 A_1} = S_{ADD_1 A_1}$, тому $S_{\text{біч}} = S_{ADD_1 A_1}$.

$$\text{Із } \Delta A_1 OM \quad A_1 M = \sqrt{A_1 O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4H^2 + a^2}.$$

$$\text{Тоді } S_{\text{біч}} = 4a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4H^2 + a^2} = 2a \sqrt{4H^2 + a^2}$$

Відповідь. $2a \sqrt{4H^2 + a^2}$.

1. Знайдіть третій вимір прямокутного паралелепіпеда, якщо два його виміри дорівнюють 6 і 7 см, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 11 см. (*Відповідь.* 6 см.)
2. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b . Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α . Знайдіть бічне ребро. (*Відповідь.* $\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \alpha$.)
3. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α , а з бічною гранню — кут β . Знайдіть виміри паралелепіпеда. (*Відповідь.* $d \sin \beta$; $d \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$; $d \sin \alpha$.)
4. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі його граней мають довжину d_1, d_2, d_3 . (*Відповідь.* $\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}$.)

III. Домашнє завдання

§ 2, ст. 185-189.

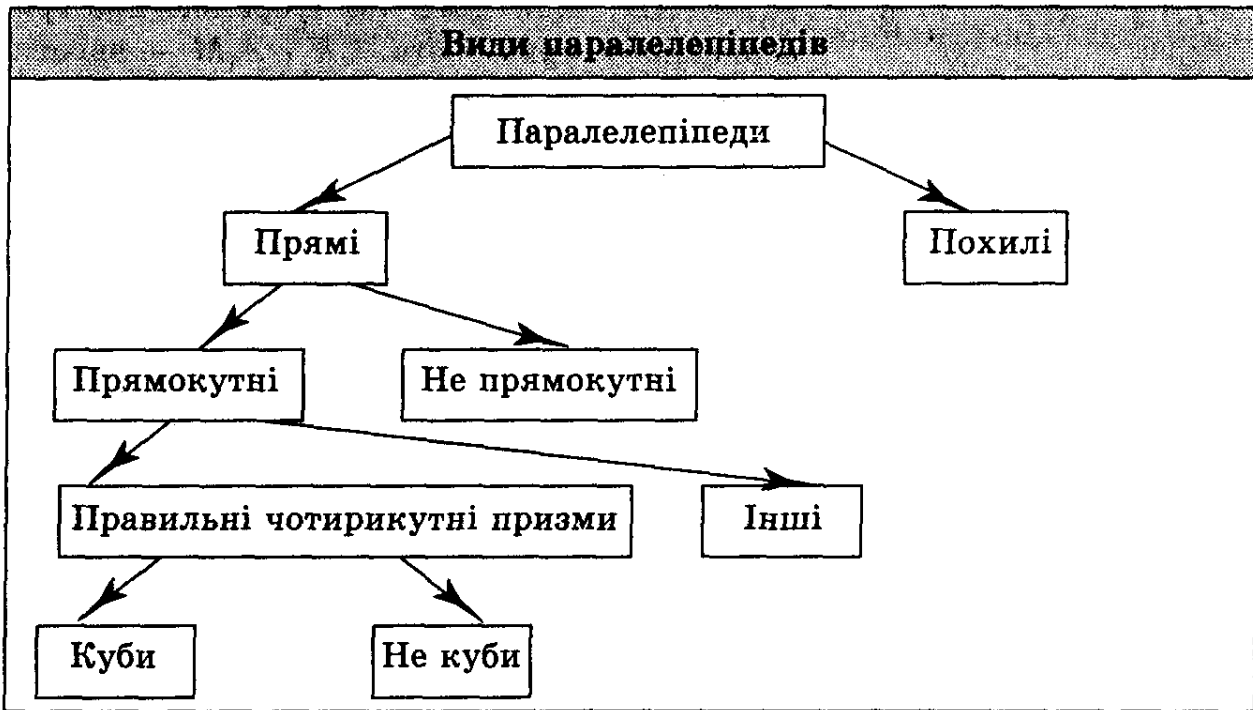
Вправи № 2.9, 2.11, 2.13, 2.15, 2.17, 2.19, 2.21, 2.23 ст.- 189-195.

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

- 1) Дайте означення паралелепіпеда.
- 2) Назвіть основні властивості паралелепіпеда.
- 3) Який паралелепіпед називається прямим; похилим?
- 4) Укажіть, які з наведених нижче тверджень правильні, а які — неправильні:
 - а) у прямому паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до сторін основи;
 - б) бічне ребро паралелепіпеда перпендикулярне до діагоналей основи;
 - в) у прямому паралелепіпеді всі діагоналі рівні;

- г) у прямому паралелепіпеді діагональні перерізи перпендикулярні до площини основи;
 д) існує похилий паралелепіпед з рівними діагональними перерізами;
 е) існує прямий паралелепіпед з рівними діагональними перерізами.



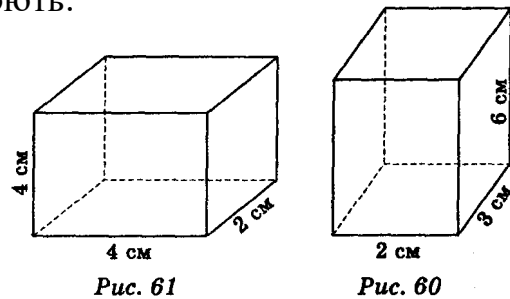
Математичний диктант № 1

Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють:

- варіант 1—3 см, 2 см і 6 см (рис. 60);
 варіант 2—2 см, 4 см і 4 см (рис. 61).

Знайдіть:

- а) довжину діагоналі паралелепіпеда;
 б) довжину діагоналі найменшої грані;
 в) площу найбільшої грані;
 г) площу найменшої грані;
 д) площу поверхні паралелепіпеда;



- е) суму відстаней від точки перетину діагоналей паралелепіпеда до всіх його вершин.

Відповідь. Варіант 1. а) 7 см; б) $\sqrt{13}$ см; в) 18 см²; г) 6 см²; д) 72 см²; е) 28 см.

Варіант 2. а) 6 см; б) $2\sqrt{5}$ см; в) 16 см²; г) 8 см²; д) 64 см²; е) 24 см.

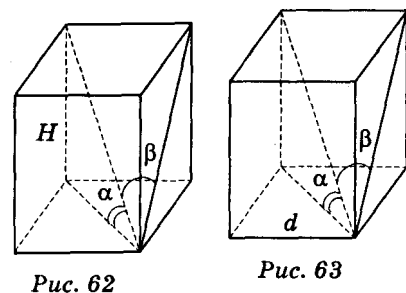
Математичний диктант № 2

У прямокутному паралелепіпеді діагональ утворює з основою кут α , а з бічною гранню кут β .

- варіант 1: бічне ребро дорівнює H (рис. 62);
 варіант 2: діагональ основи дорівнює d (рис. 63).

Знайдіть:

- а) діагональ паралелепіпеда;



- б) сторону основи, яка лежить проти кута β ;
в) другу сторону основи паралелепіпеда;
г) площу діагонального перерізу.

Відповідь. Варіант 1. а) $\frac{H}{\sin \alpha}$; б) $\frac{H \sin \beta}{\sin \alpha}$; в) $\frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$; г) $H^2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Варіант 2. а) $\frac{d}{\cos \alpha}$; б) $\frac{d \sin \beta}{\cos \alpha}$; в) $\frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$; г) $d^2 \operatorname{tg} \alpha$.