

ЛЕКЦІЯ №1

Тема заняття: Многогранник та його елементи. Правильні многогранники.

Призма. Зображення призми.

Мета заняття: формування понять многогранник; ребра, грані, вершини многогранників; опуклий многогранник: призма; основи і бічні грані, ребра призми; висота призми; поверхня та бічна поверхня призми; вивчення властивостей граней та бічних ребер призми. формування понять переріз, діагональний переріз призми. Формування понять пряма, похила і правильна призма; вивчення теореми про бічну поверхню прямої призми.

Обладнання: моделі многогранників.

Хід заняття

I. Організаційний етап

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

1. Многогранники та їх елементи, опуклі многогранники

Фігури, які вивчає стереометрія, називаються тілами. Наочно тіло уявляють як частину простору, зайняту фізичним тілом і обмежену поверхнею. Демонструємо моделі многогранників.

Многогранником називають тіло (частина простору), обмежене скінченною кількістю плоских багатокутників (рис. 18).

Многокутники, які обмежують многогранник, називають його **гранями**, їх сторони — **ребрами**, а вершини — **вершинами** многогранника.

На рис. 18 гранями є многокутники: $ABCD$, $AMLD$, $DLKC$, $BCKN$, $ABNM$, $MNKL$; ребрами — сторони AD , DC , BC , AB , KC , LD , AM , NB , ML , LK , NK , MN ; вершинами — точки A , B , C , D , M , N , K , L .

Многогранник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від площини кожного з плоских багатокутників на його поверхні.

Прикладами опуклих многогранників можуть бути куб, прямокутний паралелепіпед, тетраедр тощо. На рис. 19 зображено неопуклий многогранник.

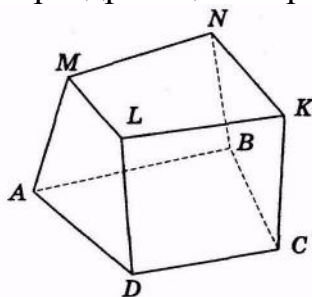


Рис. 18

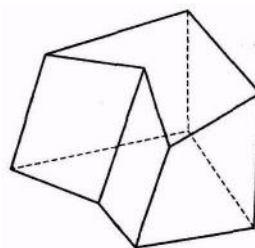


Рис. 19

Демонструємо опуклі і неопуклі многогранники. Многогранники в оточуючому середовищі зустрічаються дуже часто. Цеглина, коробка, шафа, стілець, дошка, кристал — все це моделі многогранників. Знання властивостей многогранників необхідне багатьом фахівцям.

Столяр має справу з многогранниками, вистругуючи бруски, видовбуючи в них прямокутні отвори або заглибини. Муляр кладе стіни, споруджуючи будівлі, у формі многогранників. І тесляри, що зводять горища над будівлями, і

екскаваторники, що риють котловани, і мінералоги, кристалографи, гранільники — всі мають справу з многогранниками.

Розв'язування задач

1. Наведіть приклади предметів побуту, що є геометричними тілами.
2. Які із фігур, зображених на рис. 20, є геометричними тілами?
3. Які із зображених на рис. 21 тіл є многогранниками?
4. Наведіть приклади предметів побуту, які мають форму многогранника.
5. Наведіть приклади речовин, вивчених у курсі хімії, кристали яких мають форму многогранника.

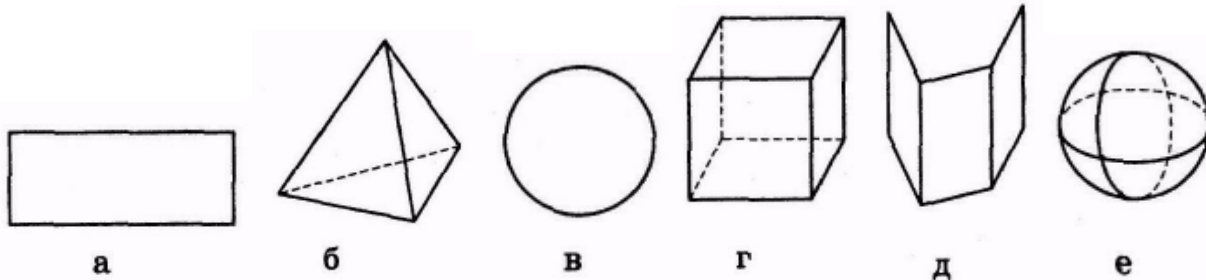


Рис. 20

6. Скільки вершин, ребер, граней має:
 - а) тетраедр; б) куб?
7. Яке найменше число ребер може мати многогранник?
(Відповідь. 6.)
8. Побудуйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і скільки вершин він має? (Відповідь. Ребер — 6, вершин — 4.)

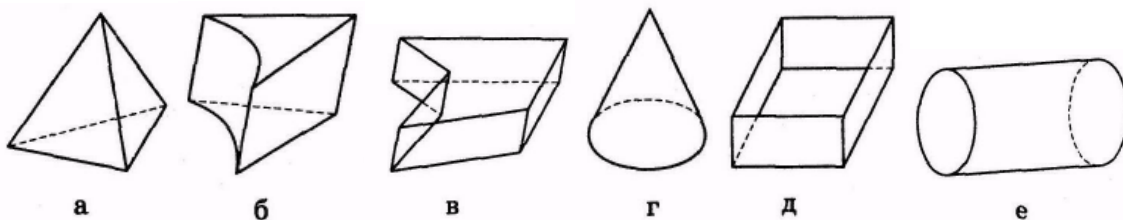


Рис. 21

9. Скільки ребер може сходитися у вершині многогранника?
(Відповідь. Довільне число, але не менше трьох.)
10. Побудуйте многогранник, у якого число вершин і число граней однакові.
11. Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розкласти на площині, то дістанемо розгортку даного многогранника. На рис. 22 подані деякі розгортки куба. Побудуйте розгортку куба, відмінну від поданих.
(Відповідь, Рис. 23.)

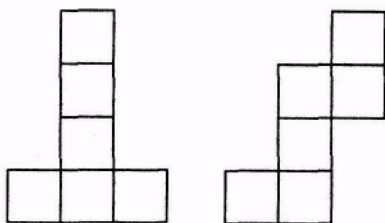


Рис. 22

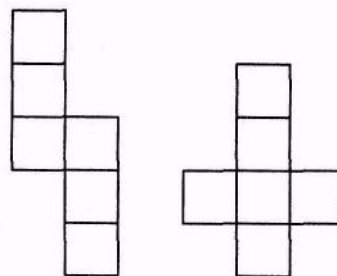


Рис. 23

12. На рис. 24 зображено розгортки многогранників. Визначте, скільки у цих многогранників вершин, граней, ребер. (Відповідь, а) Вершин — 8; граней

- 6; ребер — 12; б) вершин — 5, граней — 5, ребер — 8.)
 13. Побудуйте многогранник, який має: а) 8 ребер; б) 9 ребер; в) 11 ребер.
 (Відповідь. Рис. 25.)

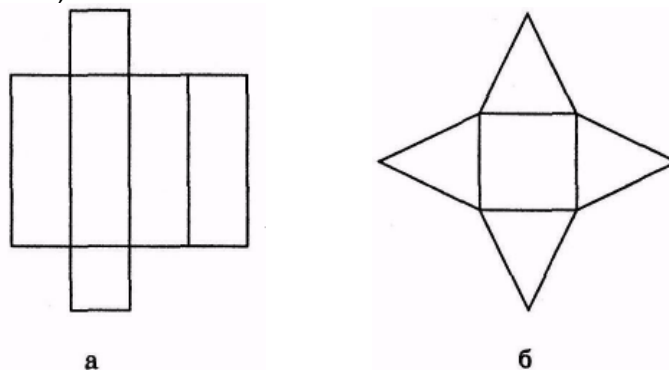


Рис. 24

14. Побудуйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має? (Відповідь, 8 ребер.)
 15. Побудуйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має? (Відповідь. 9 ребер.)
 16. Доведіть, що число плоских кутів многогранника вдвічі більше від числа ребер.
 17. Многогранник має 12 ребер. Скільки в нього плоских кутів?
 (Відповідь. 24 кути.)

2. Призма

Можна провести пояснення нового матеріалу згідно підручника(Істер).

Можна дати пояснення нового матеріалу по-іншому.

Многогранник, дві грані якого — рівні n -кутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші n граней — паралелограми, називається **n -кутною призмою** (рис. 26).

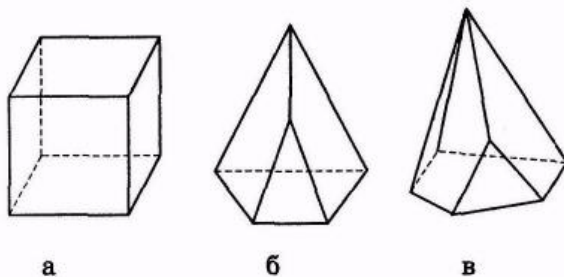


Рис. 25

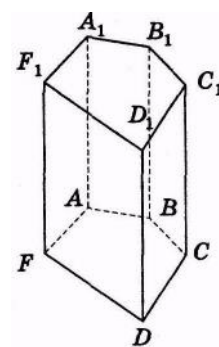


Рис. 26

Демонструємо моделі призм.

Її рівні n -кутники називаються **основами** призми, а паралелограми — бічними гранями, сторони основи — **ребрами** основи, інші ребра — **бічними ребрами**.

Завдання

Укажіть на моделях призми основи, бічні грані, ребра основи, бічні ребра.

З означення призми випливає, що основи призми рівні, а також лежать в паралельних площинах. Бічні ребра паралельні й рівні. Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні.

Площею поверхні призми називається сума площ усіх її граней. Оскільки основи рівні, то: $S_{\text{пр}} = S_{\text{біч.пов}} + 2S_{\text{осн}}$,

де $S_{\text{пр}}$ — площа поверхні призми;

$S_{\text{біч.пов}}$ — площа бічної поверхні призми;

$S_{\text{осн}}$ — площа основи.

Висотою призми називається відстань між площинами її основ. Відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній і тій самій основі, називається **діагоналлю** призми.

Розв'язування задач

- Скільки граней має n -кутна призма? Чи може призма мати 101 грань?
(Відповідь. $n+2$; так.)
- Скільки ребер має n -кутна призма? Чи може призма мати 101 ребро?
(Відповідь. $3n$; ні.)
- Скільки вершин має n -кутна призма? Чи може призма мати 101 вершину?
(Відповідь. $2n$; ні.)
- Призма має 20 граней. Який многокутник лежить в її основі?
(Відповідь. 18-кутник.)
- Назвіть предмети побуту, які мають форму призми.
- а) Скільки діагоналей можна провести в чотирикутній; п'ятикутній; n -кутній призмі?
б) Чи існує призма, яка не має діагоналей?
(Відповідь, а) 4; 10; $(n-3)n$; б) існує: трикутна призма.)
- Знайдіть суму всіх плоских кутів n -кутної призми.
(Відповідь. $720^\circ (n-1)$.)
- Знайдіть суму всіх двогранних кутів n -кутної призми.
(Відповідь. $360^\circ (n-1)$.)

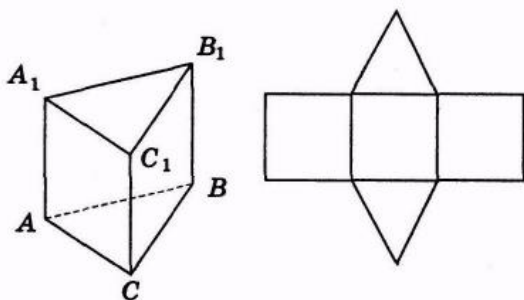


Рис. 27

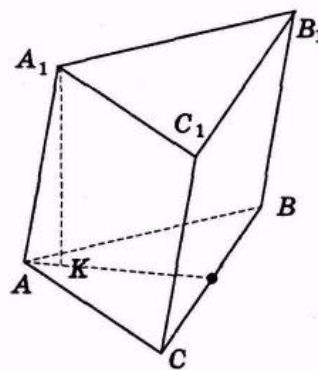


Рис. 28

- Три грані призми — квадрати зі стороною 2 см, а дві інші — трикутники. Накресліть цю призму та її розгортку. Знайдіть площу поверхні призми.
(Відповідь. Рис. 27, $12 + 2\sqrt{3}$ см².)
- Висота призми дорівнює H , а бічне ребро нахилене до площини основи призми під кутом α . Знайдіть довжину бічного ребра призми.
(Відповідь. $\frac{H}{\sin \alpha}$.)
- $ABCA_1B_1C_1$ — призма, $A_1K \perp (ABC)$, $AK \perp BC$ (рис. 28). Доведіть, що BB_1C_1C — прямокутник.

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки $A_1K \perp (ABC)$ і $AK \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $A_1A \perp BC$. Оскільки $CC_1 \parallel AA_1$ і $A_1A \perp BC$, то $CC_1 \perp BC$.

Оскільки BB_1C_1C — паралелограм і $\angle C_1CB = 90^\circ$, то BB_1C_1C — прямокутник.

12. Основа призми — рівносторонній трикутник, одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Доведіть, що одна з граней призми — прямокутник.

13. Основа призми — правильний трикутник ABC . Бічне ребро AA_1 утворює рівні кути зі сторонами основи AC і AB . Доведіть, що:

а) $BC \perp AA_1$; б) CC_1B_1B — прямокутник.

3. Правила зображення призми

Зображення призми зручно починати із зображення однієї із її основ. Треба нагадати учням правила зображення многокутників, які вивчали в 10 класі;

- зображенням трикутника (рівностороннього, рівнобедреного, прямокутного) є довільний трикутник;
- зображенням паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата) є довільний паралелограм;
- зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної) є трапеція, у якій відношення довжин основ дорівнює відношенню довжин основ зображеної трапеції;
- зображенням довільного чотирикутника (не паралелограма і не трапеції) є довільний чотирикутник;
- зображенням правильного шестикутника є шестикутник, у якого три пари протилежних сторін попарно рівні.

Після побудови зображення основи зображають бічні ребра у вигляді паралельних і рівних відрізків і з'єднують послідовно їх вільні кінці.

Слід визначити, що невидимі ребра зображають штриховими лініями. Для більшої наочності рисунка висоту призми, а також бічні ребра призми, які перпендикулярні до основи, будемо зображати "вертикальними відрізками".

Виконання вправ

1. Побудуйте чотирикутну призму, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з основами 1 і 3 см, а бічні ребра перпендикулярні до основи призми.
2. Побудуйте трикутну призму, у якій бічні ребра не перпендикулярні до площини основи призми. Проведіть висоту призми.
3. Побудуйте трикутну призму, у якій одна із вершин верхньої основи проектується в центр кола, вписаного в нижню основу призми.

4. Правила побудови перерізів призми

У стереометрії часто доводиться розглядати перерізи тіл, зокрема многогранників, різними площинами.

Перерізом опуклого многогранника є опуклий плоский многокутник.

Його вершини в загальному випадку є точками перетину січної площини з ребрами многогранника, а сторони — відрізками, по яких січна площина перетинає грані многогранника.

Переріз призми площиною, яка проходить через два бічні ребра, які не

належать одній грані, називається *діагональним перерізом* призми (рис. 29).

Виконання вправ

1. Скільки діагональних перерізів можна провести в n -кутній призмі ($n > 3$) ?

(Відповідь. $\frac{n(n-3)}{2}$.)

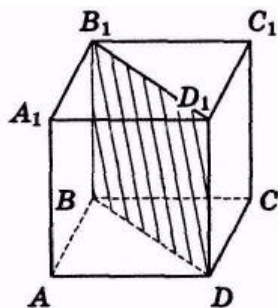
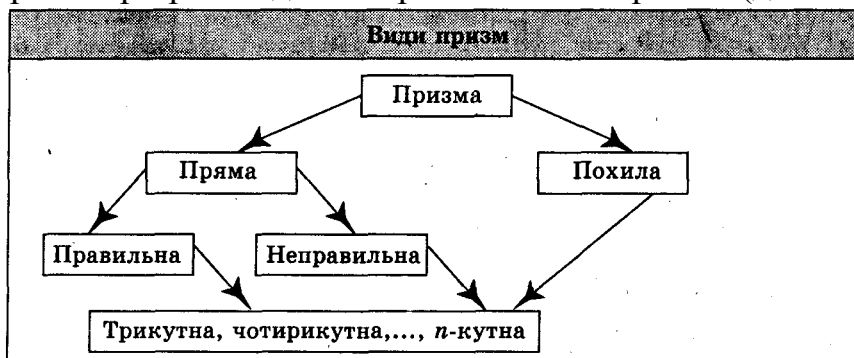


Рис. 29

5. Види призм

У стереометрії розглядають прямі і похилі призми (див. схему).



Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основи.

Інші призми називаються *похилими*. Демонструються моделі прямих і похилих призм.

Пряма призма називається *правильною*, якщо в її основі лежить правильний багатокутник. Демонструються моделі правильних призм.

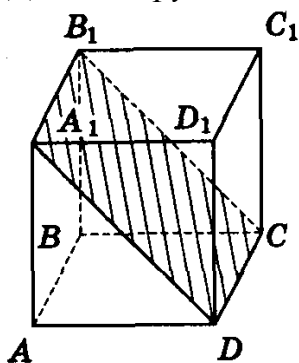


Рис. 41

Розв'язання задачі № 18

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна чотирикутна призма (рис. 49), $S_{ABB_1A_1} = Q$

$$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1 \quad Q = AB \cdot BB_1 \quad S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1.$$

Із $\triangle ABD$

$$BD = \frac{AB}{\cos \angle ABD} = \frac{AB}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = AB\sqrt{2}.$$

Тоді $S_{BDD_1B_1} = \sqrt{2}AB \cdot BB_1 = \sqrt{2}Q.$

Відповідь. $\sqrt{2}Q.$

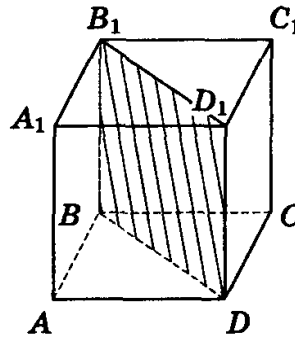


Рис. 49

Задача № 15 (с. 77).

Провівши $KB \perp AC$, маємо $AK = KC$, $\angle AMK = \angle KMC = \frac{\alpha}{2}$. Нехай $AC = a$.

Із $\triangle AMK$ $MK = AK \operatorname{ctg} \angle AMK = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Із $\triangle ABK$ $KB = AB \sin \angle BAK = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Із $\triangle KMB$ $\cos x = \frac{KB}{MK} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Тоді $x = \arccos \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$

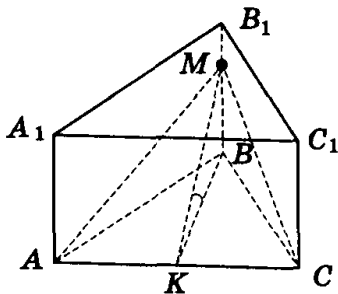


Рис. 42

Відповідь. $\arccos \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)$.

III. Домашнє завдання

(Істер)

Частина II. Розділ I. § 1, ст.173-176. № 1.8, 1.10, 1.20, 1.22, 1.24, 1.34. - ст.180-185.

IV. Підведення підсумку заняття

Запитання до групи

- 1) Дайте означення опуклого многогранника.
- 2) Скільки граней має 15-кутна призма?
- 3) Скільки діагоналей можна провести в семикутній призмі?
 - 1) Якою фігурою є діагональний переріз призми? Поясніть, чому.
 - 2) Яка фігура є перерізом призми площиною, паралельною основам?

Поясніть, чому.

3) Які методи побудови перерізів вам відомі? У чому їх суть?

- 1) Дайте означення прямої (похилої) призми.
- 2). Дайте означення правильної призми.
- 3) Перелічіть властивості прямої призми.
- 4) Перелічіть властивості правильної призми.
- 5) Що таке бічна поверхня призми (повна поверхня призми)?
- 6) Чому дорівнює бічна поверхня прямої призми?
- 7) Дано пряму шестикутну призму (рис. 43). Укажіть, які із наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
 - а) всі бічні грані призми — рівні прямокутники;
 - б) всі бічні грані — прямокутники;
 - в) висота призми дорівнює бічному ребру;
 - г) всі діагональні перерізи рівні.