ЛЕКЦІЯ № 4

Тема заняття: Обчислення площ плоских фігур, інші застосування інтеграла.
Мета заняття: Формування умінь студентів застосовувати інтеграл до обчислення площ плоских фігур.

І. Перевірка домашнього завдання.

1. Розвязування вправ.

1) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\int\limits_{2}^{6}\sqrt{2x-3}dx = \int\limits_{2}^{6}(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{2}^{6} = \frac{(2x-3)^{3/2}}{3}\Bigg|_{2}^{6} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

3) $\int\limits_{0}^{1}(x+1)^5 dx = \frac{(x+1)^6}{6}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{2^6}{6}-\frac{1^6}{6} = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6} = 10\frac{1}{2}$.

4) $\int\limits_{0}^{4}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}x+1}}dx = \int\limits_{0}^{4}2\left(\frac{1}{2}x+1\right)^{-\frac{1}{2}}dx = 8\sqrt{\frac{1}{2}x+1}\Bigg|_{0}^{4} = 8\sqrt{3}-8$.

5) $\int\limits_{0}^{\pi/24}\frac{2dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -2\cdot\frac{1}{2}ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi/24} = -ctg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi/24} = -ctg\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+ctg\frac{\pi}{4} =$

$= -ctg\frac{\pi}{3}+1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}+1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

2. Математичний диктант.

Обчислити інтеграли: (кожне завдання оцінюється по 2 бали)

1) $\int\limits_{0}^{1}xdx$; 2) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x}{2}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{3}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin xdx$; 5) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos xdx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sqrt{3}$.

ІІ. Формування вмінь і навичок обчислювати площі плоских фігур.

На попередніх заняттях ми обчислювали площі криволінійних трапецій. Але на практиці часто доводиться обчислювати площі фігур, які не є криволінійними трапеціями.

Якщо треба обчислити площу фігури, обмежену декількома лініями, то знаходять криволінійні трапеції, переріз або об'єднання яких є дана фігура, обчислюють площі кожної із них і знаходять різницю або суму площ цих криволінійних трапецій.

<u>Виконання вправ</u>______________________________

1. Запишіть площу заштрихованих фігур як суму або різницю площ криволінійних трапецій (рис. 106), обмежених графіками відомих функцій.

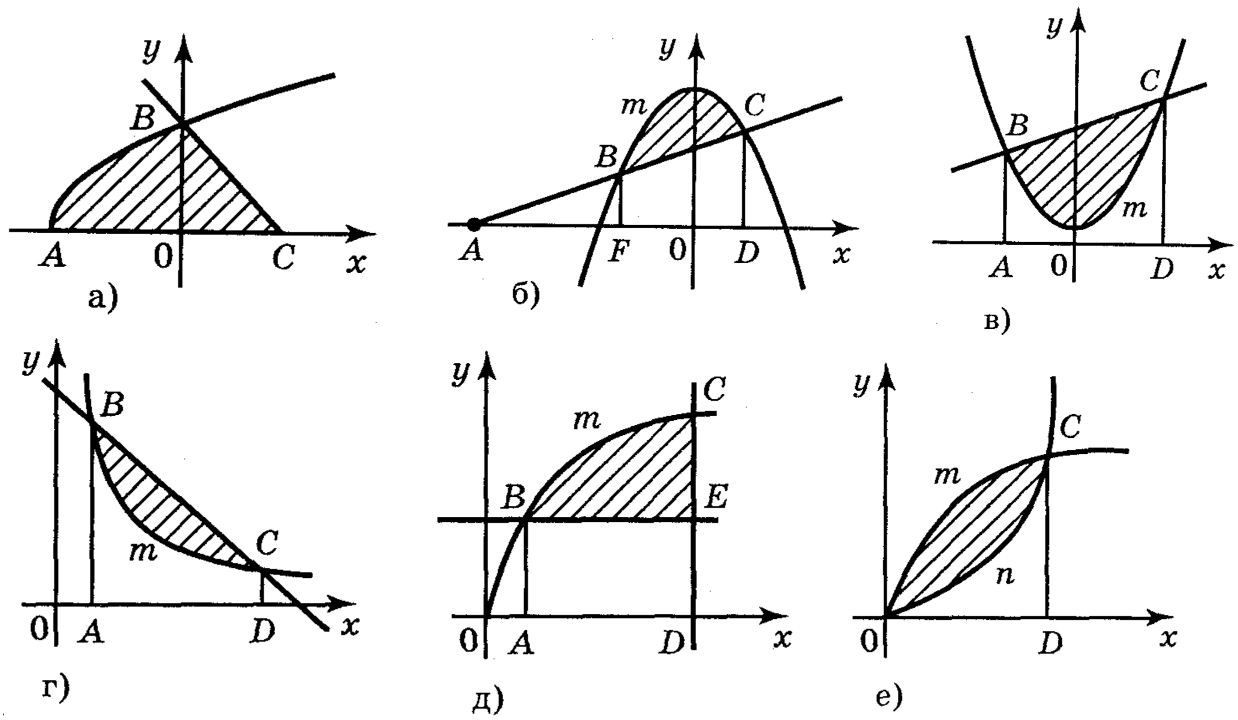


Рис. 106

Відповідь: а) $S = S_{ABO} + S_{OBC}$; б) $S = S_{FBmCD} - S_{FBCD}$; в) $S = S_{ABCD} - S_{ABmCD}$; г) $S = S_{ABCD} - S_{ABmCD}$; д) $S = S_{ABCD} - S_{ABED}$; є) $S = S_{OmCD} - S_{OnCD}$.

Розглянемо приклади знаходження площ плоских фігур.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $\pi < x < 2\pi$.

Розв'язання

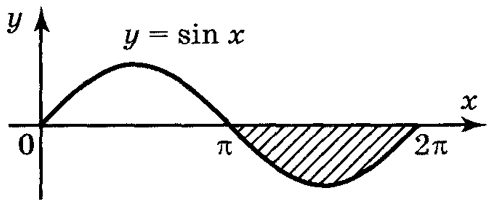


Рис. 107

Побудуємо фігуру, площу якої треба обчислити (рис. 107). На заданому проміжку функція $y = \sin x \leq 0$. Тому обчислення площі цієї фігури замінимо обчисленням площі криволінійної трапеції, симетричної даній фігурі відносно осі абсцис, тобто обмеженої графіком функції $y = -\sin x$ і віссю абсцис.

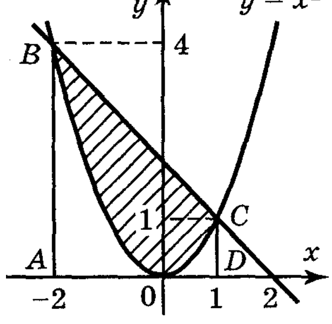


Рис. 108

$$S = \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx = \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 1 + 1 = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2$ і $y = -x + 2$.

Розв'язання

Зобразимо схематично графіки даних функцій (рис. 108). Бачимо, що шукана площа є різницею площ двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ABCD} – S_{ABOCD}.$$

З рисунка видно, що межі інтегрування для обох трапецій одні і ті самі, це абсциси спільних точок графіків даних функцій. Для знаходження меж інтегрування розв'яжемо рівняння:

$x^2 = -x + 2$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Знайдемо шукану площу:

$$S = \int_{-2}^{1}(-x+2)dx - \int_{-2}^{1}x^2dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{4}{2}-4\right)-\frac{1}{3}-\frac{8}{3}=$$

$= 1{,}5 + 6 – 3 = 4{,}5.$

Відповідь: 4,5.

Приклад 3. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ та віссю *OX*.

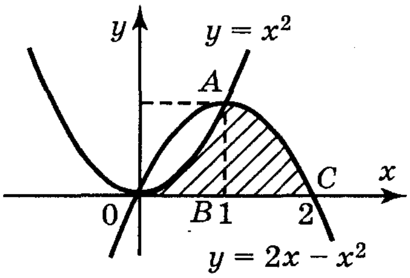


Рис. 109

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ *і* $y = 2x - x^2$ і знайдемо абсциси точок перетину цих графіків із рівняння: $x^2 = 2x – x^2$. Корені цього рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Дана фігура зображена на рис. 109.

Із рисунка видно, що ця фігура складається з двох криволінійних трапецій: *OAB* і *BAC*.

Отже, шукана площа дорівнює сумі площ цих трапецій: $S = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = 1$

Відповідь: 1.

Виконання вправи № 11 (8; 10; 12; 14) розділу IX, вправи № 4 (2; 4; 6) розділу X із підручника.

III. Сприймання і усвідомлення формули знаходження об'єму тіл.

Поняття інтеграла може бути використано для виведення формули об'ємів тіл.

Розглянемо практичний приклад. Припустимо, що нам потрібно обчислити об'єм лимона, який має неправильну форму, і тому використати яку-небудь відому формулу об'єму неможливо. Поступимо таким чином. Розріжемо лимон на тоненькі дольки. Кожну дольку приблизно можна вважати циліндром, радіус якого можна виміряти. Об'єм такого циліндра легко обчислити за готовою формулою. Склавши об'єми маленьких циліндрів, ми одержимо приблизно об'єм всього лимона. Наближення буде тим точніше, чим на більш тонкі частини ми зможемо розрізати лимон.

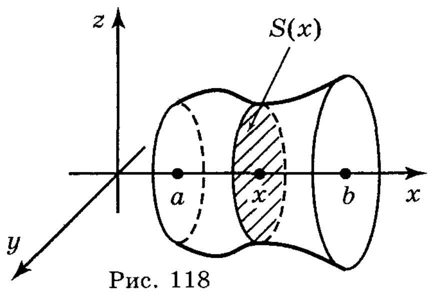


Рис. 118

Використаємо аналогічну процедуру для обчислення об'єму тіла.

На рисунку 118 зображено довільне тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Припустимо, що дане тіло розташоване між паралельними площинами. Введемо систему координат так, щоб вісь абсцис була перпендикулярна цим площинам. Позначимо через *S(x)* площу перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі абсцис і яка перетинає її в точці *x*; функція *S(x)* неперервна на відрізку [a; *b*].

Розділимо відрізок [*a; b*] на *n* рівних відрізків: $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ і через точки перетину проведемо площини, перпендикулярні осі *OX.* Ці площини розріжуть дане тіло на *n* шарів.

Об'єм даного тіла приблизно дорівнює сумі об'ємів шарів з основами $S(x_0)$, $S(x_1)$, $S(x_2)$, …, $S(x_{n-1})$ і висотою $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$V = V_n = S(x_0)\cdot\Delta x + S(x_1)\cdot\Delta x + ... + S(x_{n-1})\cdot\Delta x = (S(x_0) + S(x_1) + ... + S(x_{n-1})\cdot\Delta x.$$

Точність цього наближення тим вища, чим більше *n*, тобто, тонші прошарки. Природно вважати, що об'єм даного тіла дорівнює границі об'єму V при $n \to \infty$: $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$. Сума V є інтегральною сумою для неперервної на відрізку [*a*; *b*] функції *S(x)*, отже

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}.$$

Виведемо формулу об'єму тіла обертання. Нехай криволінійна трапеція обмежена відрізком [*a; b*] осі абсцис, графіком функції $y = f(x)$, невід'ємної і неперервної на відрізку [*a*; *b*], прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 119) обертається навколо осі *OX.* При обертанні цієї трапеції навколо осі абсцис утворюється тіло, об'єм якого можна обчислити за формулою

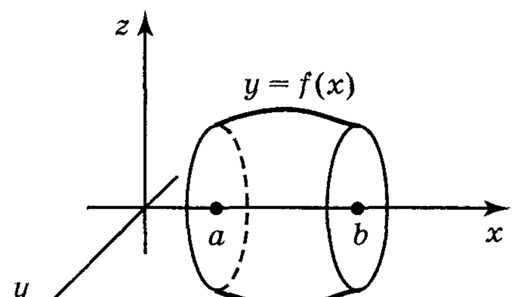


Рис. 119

$V = \int_a^b S(x)dx$. Але $S(x) = \pi y^2$ або $S(x) = \pi(f(x))^2$, отже,

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Виконання вправ

Обчисліть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а) $y = 3x,\ y = 0,\ x = 2;$

б) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2;$

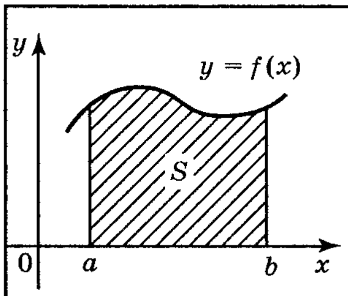
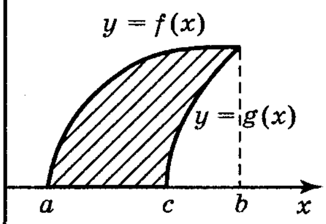
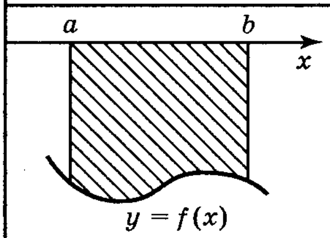
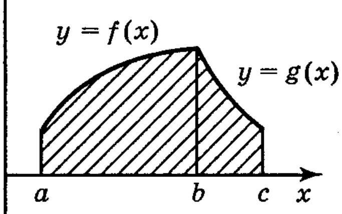
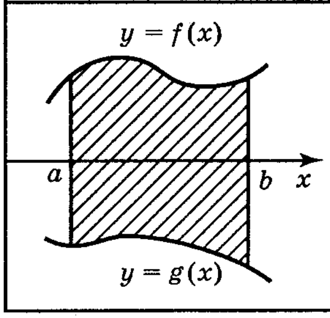
в) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$.

Відповіді: а) 24π; б) $13\frac{11}{15}\pi$; в) $0{,}5\pi^2$.

IV. Підведення підсумків заняття.

При підведенні підсумків заняття рекомендується скористатися таблицею 10.

Таблиця 10

	**Площа криволінійної трапеції** $S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
	**Обчислення площ** $S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b g(x)\,dx$
	$S = -\int_a^b f(x)\,dx$
	$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)\,dx$
	$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$