ЛЕКЦІЯ № 3

Тема заняття: Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца.

Мета заняття: Познайомити студентів з задачами, які приводять до поняття інтеграла: задача про площу криволінійної трапеції. Формування поняття інтеграла. Вивчення формули Ньютона—Лейбніца і основних властивостей інтеграла, які випливають із властивості первісної і формули Ньютона—Лейбніца.

І. Перевірка домашнього завдання.

ІІ. Сприймання і усвідомлення матеріалу про криволінійну трапецію та її площу.

У попередніх класах ви навчилися обчислювати площі прямокутника, трикутника, паралелограма, трапеції, довільного многокутника, а також площі круга та його частин.

У математиці розроблено методи, що дозволяють обчислювати площі фігур, межа яких складається з кривих ліній.

Тепер, використовуючи знання про первісну функції, ми навчимося знаходити площі фігур, які називаються криволінійними трапеціями.

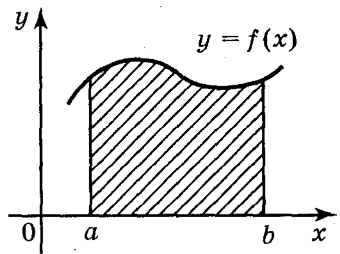

Рис. 88

Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, яка не змінює знак на відрізку $[a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a; b]$ (рис. 88).

Нехай треба обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком неперервної функції $y = f(x)$, яка приймає додатні значення, з боків відрізками прямих $x = a$, $x = b$, знизу відрізком $[a; b]$, який лежить на осі OX (рис. 89).

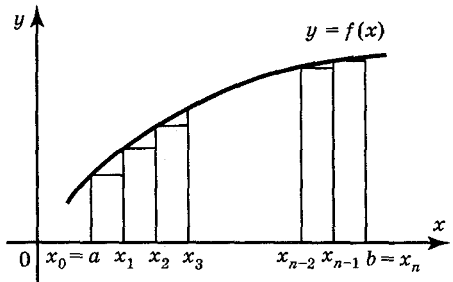

Рис. 89

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на л рівних частин й позначимо абсциси точок поділу через $x_1, x_2 ..., x_{n-1}$, $a = x_o$, $b = x_n$: $\quad a = x_o < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

На кожному із цих відрізків побудуємо прямокутники, як показано на рисунку 89. Висота прямокутника, побудованого на відрізку $[x_o, x_1]$, дорівнює $y_o = f(x_o)$; висота прямокутника, побудовано на відрізку $[x_1, x_2]$, дорівнює $y_1 = f(x_1)$ і т. д.; висота прямокутника, побудованого на відрізку $[x_{n-1}, x_n]$, дорівнює $f(x_{n-1})$·

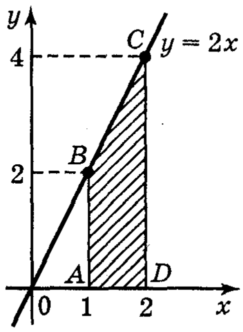

Рис. 90

Довжина основи кожного прямокутника дорівнює $\frac{b-a}{n} = \Delta x$. Слід зазначити, що

$$x_1 - x_o = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$$

Об'єднання всіх n прямокутників є східчаста фігура. Позначимо її площу через S , тоді

$$S_n = f(x_o) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x = (f(x_o) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}))\Delta x.$$

Якщо $n \to \infty$, то $\Delta x \to 0$ і, оскільки функція $y = f(x)$ неперервна, то східчаста фігура буде все менше відрізнятися від криволінійної трапеції. А тому площа S криволінійної трапеції буде все менше відрізнятися від S_n, тобто $S_n \approx S$. При досить великих n ця наближена рівність справджується з будь-якою точністю. Природно вважати, що S_n при цьому буде наближатися до числа, яке й приймемо за значення площі криволінійної трапеції.

Отже, $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Розглянемо деякі приклади:

<u>Виконання вправ</u>

1. Які із заштрихованих на рисунку 93 фігур є криволінійними трапеціями, а які — ні?

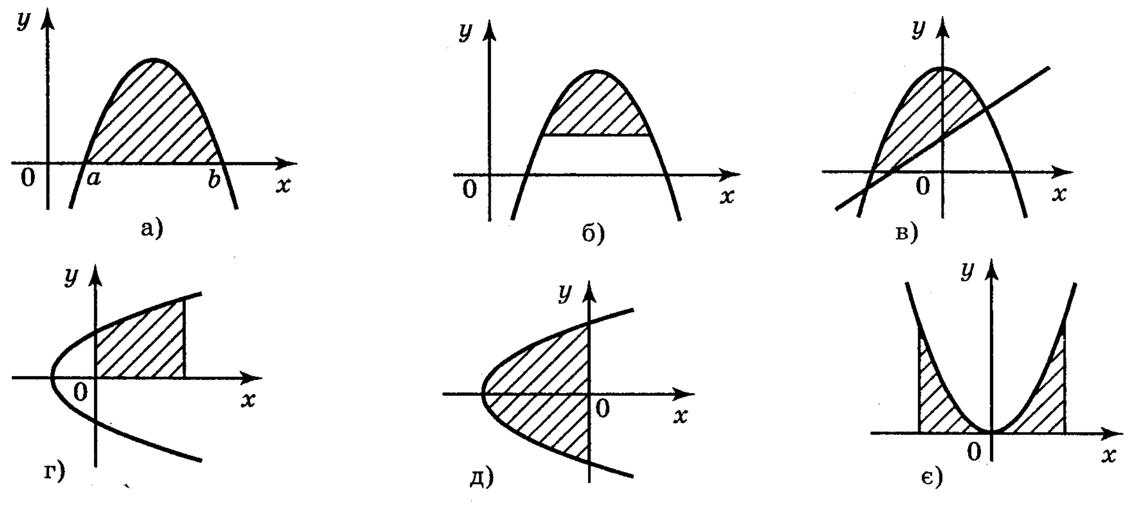

Рис. 93

Відповідь: а), г), є) — зображення криволінійних трапецій.

2. Побудуйте криволінійні трапеції:

а) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; б) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$;

в) y = е·*", $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; г) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, x = 4, $y = 0$.

Відповідь: рис. 94

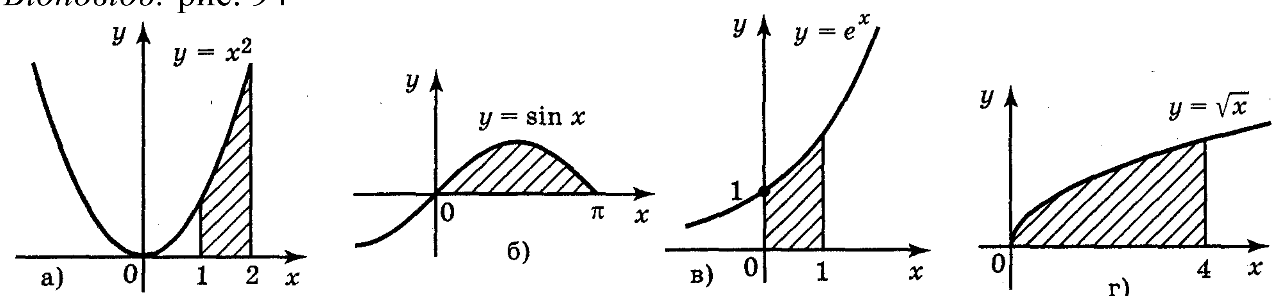

Рис. 94

Відповідь: $\approx$ 3,186.

III. Сприймання і усвідомлення поняття інтеграла.

Обидві задачі, які ми розглянули, розв'язувалися одним і тим самим методом, яким розв'язують багато інших задач (знаходження роботи змінної сили, знаходження маси неоднорідного стержня і т. д.). Узагальнемо цей метод. Розглянемо неперервну функцію $y = f(x)$, невід'ємну на відрізку [a; b] (рис. 97). Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$

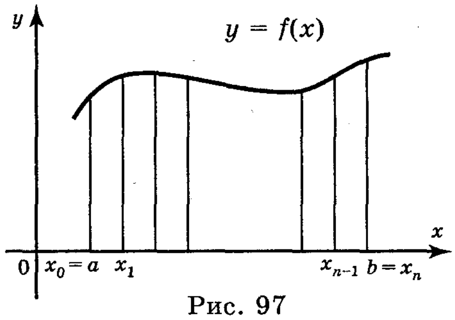

Рис. 97

$< \ x_n = b$, довжина кожної частини дорівнює $\frac{b-a}{n} = \Delta x$.

Утворимо суму S добутків $f(x_i)\cdot\Delta x$, де $i = 0; 1; ... ; n - 1$, яка називається інтегральною сумою: $S_n = f(x_0)\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_{n-1})\cdot\Delta x$·.

Знайдемо $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

За означенням цю границю називають інтегралом функції $y = f(x)$ від a до b і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають так: «інтеграл від a до b еф від x де ікс»).

У позначенні інтеграла все вказує на спосіб його утворення. Знак інтеграла нагадує видовжену латинську букву S — першу букву слова summa (сума). Підінтегральний вираз $f(x)dx$ нагадує вигляд кожного окремого доданка $f(x_1)\cdot\Delta x$ інтегральної суми. Множник dx в математиці називають диференціалом. Число a називається нижньою межею інтегрування, а число b — верхньою межею інтегрування. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$.

Отже, $\int_a^b f(x)dx$, якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a;b]$, являє собою площу криволінійної трапеції обмеженої лініями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Виконання вправ

1. Побудуйте схематично фігури, площі яких виражаються такими інтегралами:

а) $\int_1^2 x dx$; б) $\int_1^2 x^2 dx$; в) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$; г) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

Відповідь: рис. 98.

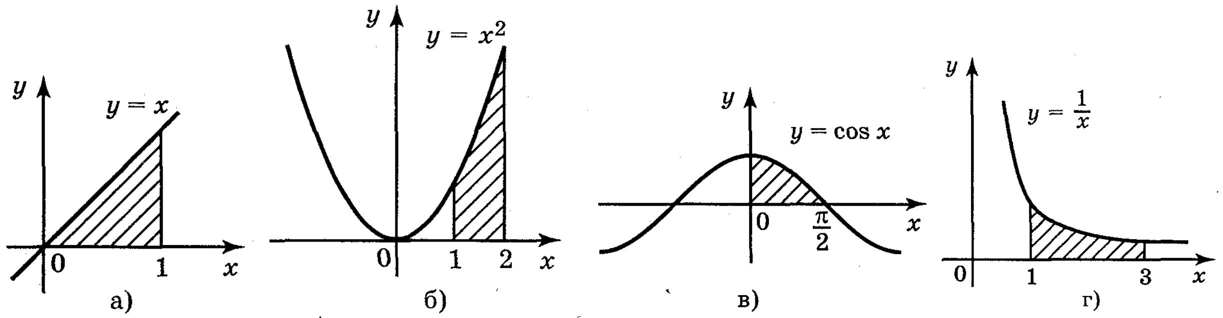

Рис. 98

2. Запишіть за допомогою інтеграла площі фігур, зображених на рисунку 99.

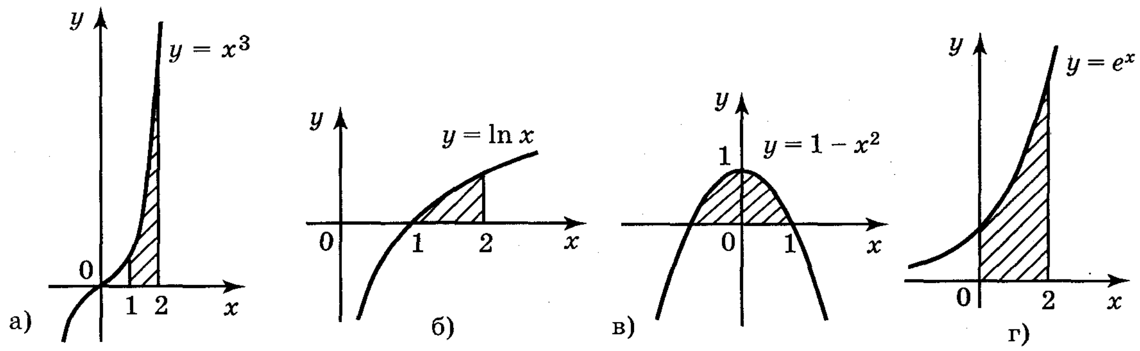

Рис. 99

Відповіді: а) $\int_1^2 x^2dx$; б) $\int_1^2 \ln xdx$; в) $\int_{-1}^1 (1-x^2)dx$; г) $\int_0^2 e^x dx$

Слід зазначити, що в означенні інтеграла відрізок [*a*; *b*] можна було б ділити на *n* не обов'язково рівних частин. Але в цьому разі довжина найбільшого з відрізків розбиття повинна прямувати до 0, коли $n \to \infty$.

IV. Сприймання і усвідомлення теореми про площу криволінійної трапеції.

Вияснимо, як можна обчислити площу *S* криволінійної трапеції за допомогою первісної функції *y = f(x).*

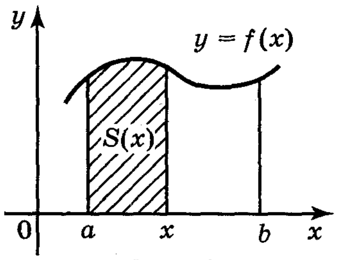

Рис. 101

Позначимо *S(x)* площу криволінійної трапеції з основою [*a*; *x*] (рис. 101), де *x* — будь-яка точка відрізку [*a*; *x*]. При *x* = *a* відрізок [*a*; *x*] перетворюється в точку і тому *S(a)*·= 0; при *x* = *b* маємо *S(b)* = *S* — площу криволінійної трапеції.

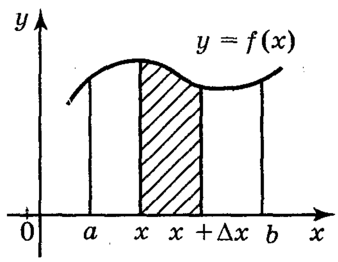

Рис. 102

Доведемо, що *S(x)* є первісною функції *f(x),* тобто *S'(x) = f(x).*

Розглянемо різницю $S(x+\Delta x) - S(x)$, $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно). Ця різниця дорівнює площі криволінійної трапеції з основою [*x; x* + Δx] (рис. 102).

Якщо Δx мале число, то площа приблизно дорівнює $f(x)\cdot\Delta x$, тобто $S(x + \Delta x) - S(x) \approx f(x)\cdot\Delta x$.

Таким чином, $\dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \approx f(x)$. Якщо $\Delta x \to 0$, то ліва частина наближеної рівності за означенням похідної наближається до $S'(x)$, тому

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} = f(x)$, $S'(x) = f(x)$.

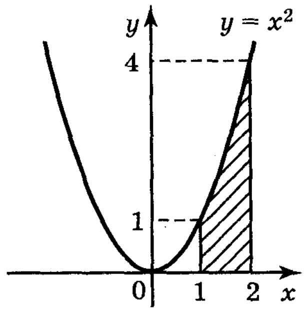

Рис. 103

Це і означає, що *S(x)* є первісною функції *f(x).*

Будь-яка первісна *F(x)* відрізняється від *S(x)* на стале число, тобто

F(x) = S(x) + C. (1)

Із цієї рівності при *x = a* одержуємо *F(a) = S(a) + C.* Оскільки S(*a*) = 0, то C = *F(b)* і рівність (1) можна записати так:

S(x) = F(x) - F(a).

Звідси при $x = b$ одержуємо:
$S(b) = F(b) - F(a\}$, $S = F(b) - F(a)$.
Отже, площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ — будь-яка первісна функція $f(x)$.

Приклад 1. Побудуйте, криволінійну трапецію, обмежену лініями $f(x) = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Обчисліть її площу.

Розв'язання

Криволінійна трапеція зображена на рис. 103.

Однією з первісних для функції $f(x) = x^2$ є $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Отже, $S = F(2) - F(1) = \dfrac{2^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} = 2\dfrac{1}{3}$

Відповідь: $2\dfrac{1}{3}$.

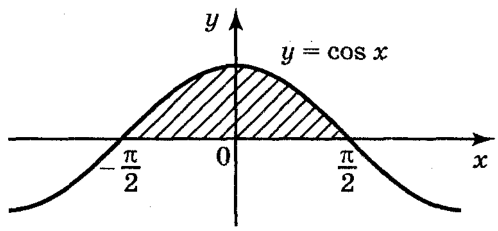

Рис. 104

Приклад 2. Побудуйте криволінійну трапецію, обмежену лініями $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$

*Розв'язання*Криволінійну трапецію зображено на рисунку 104. Одна із первісних функції $y=\cos x$ є $F(x) = \sin x$, тоді

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

Відповідь: 2.

Виконання вправ

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:
а) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;
б) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$;
в) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;
г) $y = \sqrt{x}$; $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Відповідь: а) 2^2; б) 4; в) 2; г) $4\dfrac{2}{3}$

V. Сприймання і усвідомлення формули Ньютона— Лейбніца.

Порівнюючи формули площі криволінійної трапеції

$S = \int\limits_a^b f(x)dx$ і $S = F(b) - F(a)$, робимо висновок: якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на відрізку [a; b], то

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца. Ця формула правильна для будь-якої неперервної на відрізку [a; b] функції $f(x)$, пов'язує поняття інтеграла й первісної для даної функції, є правилом обчислення інтегралів.

Для зручності запис різниці F(b) - F(a) прийнято скорочено позначати

$F(x)\Big|_a^b$. При такому позначенні формула Ньютона-Лейбніца набирає вигляду:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Приклад 1. Обчисліть $\int_{-1}^{2} x^2 dx$

Розв'язання

Оскільки для x^2 однією із первісних є $\frac{x^3}{3}$, то

$$\int_{-1}^{2} x^3 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 2. Обчисліть $\int_0^1 (x-1)dx$.

Розв'язання

$$\int_0^1 (x-1)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 - 0 = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$.

Виконання вправи № 10 (2; 4; 6; 8; 10; 12) із вправ до розділу IX.

Із властивостей первісної і формули Ньютона-Лейбніца випливають основні властивості інтеграла.

1) Інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів :

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

2) Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \text{ де } k \in R.$$

3) Якщо c є [a; b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) $$\int_a^b f(kx+p)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(x)dx,$$ де ρ є R, k є R.

Доведемо ці рівності:

$$\textbf{1)} \quad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = (F+G)\Big|_a^b = F(b)+G(b)-F(a)-G(a) =$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2) $\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx.$

3) Цю властивість інтеграла наочно видно із властивостей площі: площа всієї криволінійної трапеції, з основою [*a; b*] дорівнює сумі площ трапецій з основами [*a; c*] і [*c; b*] (рис. 105).

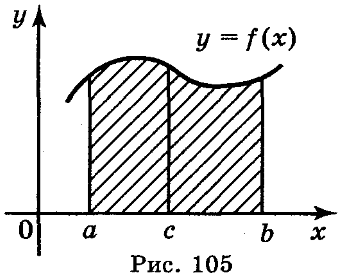

Рис. 105

Цю ж властивість можна одержати і обчисленням. Нехай *F(x)* — первісна для функції *f(x)*. Тоді

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a); \quad \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Склавши почленно ліві і праві частини рівностей, одержуємо

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Останню рівність буде доведено в курсі математичного аналізу. Властивості інтегралів допомагають в обчисленні інтегралів.

Приклад. Обчисліть: а) $\int_0^{\pi/2} (8x - \sin x)dx$; б) $\int_1^2 (x+2)^2 dx$.

Розв'язання

а) $\int_0^{\pi/2} (8x - \sin x)dx = \int_0^{\pi/2} 8xdx - \int_0^{\pi/2} \sin xdx = 8 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = 4x^2\Big|_0^{\pi/2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$

$= 4 \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - 0\right) + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \pi^2 - 1.$

б) $\int_1^2 (x+2)^2 dx = \frac{(x+2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{(2+2)^3}{3} - \frac{(1+2)^3}{3} = = \frac{4^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{64-27}{3} = \frac{37}{3} = 12\frac{1}{3}.$

Відповідь: а) π^2 - 1; б) $12\frac{1}{3}$

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

$y = \frac{1}{x}$; $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, розбивши відрізок [1; 2] на десять рівних частин і побудувавши східчасту фігуру із прямокутників.