ЛЕКЦІЯ №2

Тема заняття: Правила знаходження первісних.

Мета заняття: Формування знань студентів про правила знаходження первісних (невизначених інтегралів), формування умінь у знаходженні первісних для даних функцій, користуючись правилами знаходження первісних.

І. Перевірка домашнього завдання.

1. Відповіді на запитання, що виникли в студентів при виконанні домашніх завдань.
2. Математичний диктант.

Запишіть первісні для функцій:

1) x^7; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x^3}$; 4) $\sqrt[5]{x}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 6) e^x;

7) π^x; 8) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 9) $\frac{1}{\sin^2 x}$; 10) $\cos x$; 11) $\sin x$; 12) $x\sqrt{x}$

Відповідь: 1) $\frac{x^8}{8}$+C; 2) $\ln|x|$ +C; 3) $-\frac{1}{2x^2}$+C; 4) $\frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$ +C; 5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ +C; 6) e^x + C; 7) $\frac{\pi^x}{\ln\pi}$+C; 8) tgx+C; 9) $-ctgx$ + C; 10) $\sin x$ + C; 11) $-\cos x$ + C; 12) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.

ІІ. Сприймання і осмислення нового матеріалу.

Нагадаємо, що операція знаходження похідної для заданої функції називається диференціюванням. Обернена операція знаходження первісних для даної функції називається інтегруванням.

Правила інтегрування можна також одержати за допомогою правил диференціювання.

Правило 1. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ — первісні відповідно функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то функція $F(x) \pm G(x)$ є первісною функції $f(x) \pm g(x)$.

Дійсно, оскільки $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, то $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G(x)=f(x)\pm g(x)$.

Це правило можна сформулювати в іншій формі: інтеграл суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Приклад 1. Знайдіть первісні для функції $f(x) = x + \cos x$.

Розв'язання

Оскільки для x одна із первісних є $\frac{x^2}{2}$, а для $\cos x$ однією із первісних є $\sin x$, то однією із первісних функції $x + \cos x$ є функція $\frac{x^2}{2} + \sin x$, отже,

$F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Відповідь: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

Приклад 2. Знайти $\int\left(e^x+\sin x-\frac{1}{x}\right)dx$

Розв'язання

$$\int\left(e^x+\sin x-\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x dx+\int\sin x dx-\int\frac{1}{x}dx=e^x-\cos x-\ln|x|+C.$$

Відповідь: $e^x-\cos x-\ln|x|+C$.

Правило 2. Якщо *F(x)* є первісною для функції *f(x),* а *C* — стала, то *CF(x)* — первісна для функції *Cf(x).*

Дійсно, оскільки *F(x) = f(x)* то *(CF(x))' = CF'(x) = Cf(x).*

Це правило можна сформулювати в іншій формі: постійний множник можна виносити за знак інтеграла $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$.

Приклад 3. Знайдіть первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Розв'язання

Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то однією із первісних для функції $5e^x$ є $5e^x$; оскільки однією із первісних для функція $\sin x$ є $-\cos x$, то однією із первісних для функції $7\sin x$ є $-7\cos x$; первісною функції $3x^2$ є $3\cdot\frac{x^3}{3}$ = x^3. Отже, $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$ — первісні для функції $f(x) = 5e^x + 7\sin x - 3x^2$.

Відповідь: $F(x) = 5e^x - 7\cos x - x^3 + C$.

Приклад 4. Знайдіть $\int(1+3e^x-4\cos x)dx$.

Розв'язання

$$\int(1+3e^x-4\cos x)dx=\int 1dx+3\int e^x dx-4\int\cos x dx= x+3\cdot e^x-4\sin x+C$$

Відповідь: $x+3\cdot e^x-4\sin x+C$.

Правило 3. Якщо *F(x)* є первісною для *f(x),* а *k* і *b* — постійні числа, причому $k \neq 0$**,** то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для функції *f(kx + b).*

Дійсно, за правилом похідної складеної функції маємо:

$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = F'(kx+b) = f(kx+b).$

Це правило можна записати в інтегральній формі:

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$$

Приклад 5. Знайдіть первісні для функцій: а) $f(x) = (7 - 3x)^5$; б) $f(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання

а) Оскільки первісною для функції x^5 є функція $\frac{x^6}{6}$, то згідно з правилом 3 шукані первісні: $F(x)=-\frac{1}{3}\frac{(7-3x)^6}{6}+C=-\frac{(7-3x)^6}{18}+C$.

б) Оскільки однією із первісних для функції e^x є функція e^x, то згідно з правилом 3 маємо: $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

Відповідь: а) $F(x) = -\frac{(7-3x)^6}{18} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

Приклад 6. Знайдіть $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}$.

Розв'язання

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}} = \int (3x-1)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(3x-1)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-1)^2} + C$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-1)^2} + C$.

ІІІ. Формування умінь студентів знаходити первісні для функцій, користуючись правилами знаходження первісних.

Виконання вправ.

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^2$; б) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$ в) $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$; г) $f(x) = 5\cdot\sqrt[4]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x)=5\cos x-3\sin x$; б) $f(x)=2e^x + 3\cos x$; в) $f(x)=\frac{4}{x}+10^x$; г) $f(x)=\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}$.

3. Знайдіть невизначені інтеграли:

а) $\int (5x^4 + 2x^3)dx$; б) $\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)dx$; в) $\int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})dx$; г) $\int (4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x})dx$.

4. Знайдіть невизначені інтеграли:

а) $\int (e^x - 2\cos x)dx$; б) $\int (3e^x - \sin x)dx$;

в) $\int \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 3e^x\right)dx$; г) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{3}{x} - 2e^{-x}\right)dx$.

5. Знайдіть невизначені інтеграли:

а) $\int (2x-3)^5 dx$; б) $\int (4-5x)^7 dx$; в) $\int 5\cos 3dx$;

г) $\int 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)dx$; д) $\int \frac{4dx}{(3x-1)^2}$; є) $\int \frac{3dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$.

6. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

а) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2e^{l-2x}$; б) $f(x) = 10^{3x-1} - 2\cos 6x$; в) $f(x) = 3\sin 2x - \frac{12}{\sin^2 2x}$;

г) $f(x) = \frac{4}{3-2x} + \frac{3}{(3-2x)^2}$; д) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{2x+3}}$; є) $f(x) = e^x + 10^{-2x+3}$.

Відповідь:

1.а) $F(x) = \frac{x^6}{3} - \frac{5x^3}{3} + C$; б) $F(x) = 3\ln|x| - \frac{1}{x^2} + C$; в) $F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{9}{4}x\sqrt[3]{x} + C$; г) $F(x) = 4x\sqrt[4]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

2. а) $F(x) = 5\sin x + 3\cos x + C$; б) $F(x) = 2e^x + 3\sin x + C$;

в) $F(x) = 41n|x| + \frac{10^x}{\ln 10} + C$; г) $F(x) = 3tg\, x + 5ctg\, x + C$.

3. а) $x^5 + \frac{x^4}{2} + C$; б) $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + C$; в) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + C$; г) $3x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x} + C$.

4. а) $e^x - 2\sin x + C$; б) $3e^x + \cos x + C$; в) $\frac{9}{2}x\sqrt[3]{x} - 2\ln|x| + 3e^x + C$; г) $4tgx + 31n|x| + 2e^x + C$.

5. а) $\frac{(2x-3)^6}{12} + C$; б) $\frac{(4-5x)^8}{-40} + C$; в) $\frac{5}{3}\sin 3x + C$; г) $4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C$; **д)** $-\frac{4}{3(3x-1)} + C$**;**

е) $-3tg\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$.

6. а) $F(x) = x - \frac{1}{3}\sin 3x - e^{1-2x} + C$; б) $F(x) = \frac{10^{3x-1}}{3\ln 10} - \frac{1}{3}\sin 6x + C$;

в) $F(x) = -\frac{3}{2}\cos 2x + 6ctg 2x + C$; г) $F(x) = -2\ln|3-2x| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3-2x} + C$;

д) $F(x) = -10\sqrt{2-x} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{(2x+3)^2} + C$; є) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{10^{-2x+3}}{2\ln 10} + C$.